
拓

拓扑学的基础和方法

〔日〕野口　宏 著

郭卫中　王家彦 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书的主要内容大体可分为三部分：第一部分简要地介绍了拓扑学的发展情况；第二部分着重讲述了集合、映射、拓扑空间、流形、闭曲面的分类和向量场等拓扑学的基本内容，这是这本书的主体部分；第三部分研究了拓扑学在力学和生物学方面的一些应用，借以说明拓扑学与实际的联系以及它在其他学科中应用的广泛性.

本书的特点是，它选择了拓扑学最基本最主要的内容，巧妙地利用了大量的图和例，直观生动，容易理解.

本书可供大学生、中学数学教师、数学工作者以及想了解拓扑学的数学爱好者阅读.

野口 宏

トポロジ———基礎と方法

日本評論社，1979，第1版第11刷

拓扑学的基础和方法

〔日〕野口 宏 著

郭卫中 王家彦 译

孙以丰 校

责任编辑 杜小杨

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年3月第一版 开本：787×1092 1/32

1986年3月第一次印刷 印张：8 1/4

印数：001—6,200 字数：186,000

统一书号：13031·3070

本社书号：4409·13—1

定价： 1.95 元

译 者 的 话

《拓扑学的基础和方法》的作者是日本早稻田大学理工学部教授、理学博士野口宏先生。

《拓扑学的基础和方法》一书是1971年于日本出版的，到1979年已印刷了十一次，在较短的时间内印刷次数如此之多，可想而知它是深受日本广大读者欢迎的一本畅销书。

这本书的内容大体上可分为三部分：第一部分简要地介绍了拓扑学的发展状况；第二部分，也是本书的主体部分，用较多的篇幅着重叙述了拓扑学的基本内容和方法；第三部分研究了拓扑学在力学和生物学方面的一些应用。

这本书的显著特点是，它选择了拓扑学最基本最主要的内容；采用了由浅入深，通俗易懂的方法；巧妙地使用了大量的图和例，来说明拓扑学的抽象概念。我们相信把这样一本好书介绍给我国广大读者，将对拓扑学的教学、研究以及普及工作起到有益的作用。

本书可供大学生、中学数学教师、科技工作者、数学工作者以及想了解拓扑学的数学爱好者学习和参考。也可作为大专院校数学专业的教学参考书。

本书的前十章是郭卫中译的，后四章是王家彦译的。全部译稿承吉林大学数学系孙以丰教授审校。关于拓扑学在生物学和力学方面的应用部分的译稿还请兰书成、张世泽、郭庭选等同志看过，在此，谨致谢意。

限于译者的水平，本书译文会有不当或错误之处，欢迎读者指正。

译 者

1983年12月

致中国读者

这次，东北师范大学郭卫中、王家彦先生将拙著《拓扑学的基础和方法》译成中文出版，我感到十分荣幸，对两位先生的努力深表谢意.

我尽量把这本书写得简明易懂，让那些即使没有专门学过数学的读者也能直观地理解二十世纪产生的新几何学——拓扑学是一种什么样的学问，在科学方面起着什么样的作用.

因而，如果这本书对数学系的学生来说能成为拓扑学的入门书，对一般读者来说能成为常识性的现代数学的启蒙书，我是非常高兴的.

借此机会，我衷心祝愿贵国繁荣昌盛，人民幸福.

野口 宏

1984年1月

前　　言

最近，法国的拓扑学家 R.托姆 (Thom) 发表了题为"生物学中的拓扑模型" (Topological Models in Biology, *Topology*, Vol.8, 313—335, 1969) 的论文. 拓扑学是由历史上著名的数理科学家 H. 庞加莱 (Poincaré) 等人创始的现代几何学，它是研究我们每个人都具有的图形朴素直观性质的数学. 所谓朴素的性质也正是那些基本的性质. 但是，直到本世纪，拓扑学才成为一门科学. 拓扑学一旦作为科学出现，它的威力不仅对整个数学而且对一般科学也都产生了巨大的影响. 前面说过的托姆的论文就是其中的一例. 我认为，拓扑学现在正处于发展的极盛时期. 今后，拓扑学在科学方面的应用，对促进科学的飞跃发展和拓扑学本身的成熟都将起着巨大的作用.

本书从这样的观点出发，以拓扑学的主要对象——流形为中心，把拓扑学的研究方法和托姆的形态形成论的梗概，尽量解释得通俗易懂.

最后，向给我们绘制优美点描插图的画家野口健先生以及一直关心并惠予出版的日本评论社的东弘幸先生致以深切的谢意.

野口　宏

1970 年 8 月 31 日

目　　录

第一章　拓扑学的进展

拓扑学可以说是从瑞士的 L. 欧拉 (Euler) 在 1736 年发表的论文开始的．欧拉的这篇论文研究众所周知的所谓哥尼斯堡七桥问题，这是一个网络图一笔画的问题．因此，拓扑学已是二百多年以前所产生的一门学问．然而，也象其它任何科学

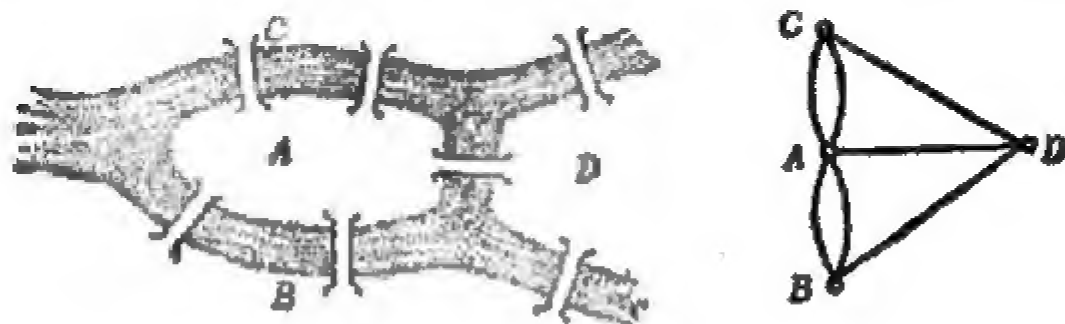


图　1-1

由某处出发，能否对七个桥的任何一个只通过一次回到原处，这个问题和右边的网络图能否一笔画成的问题是相同的

那样，若去追溯拓扑学的发展历史，则在两千年前欧几里得 (Euclid) 完成的欧氏几何学中，就可见到拓扑学的痕迹了．再夸张一点讲，我们的远古祖先狩猎民族已经发现了拓扑学．古代人在捕捉动物的时候，把动物围在中间，如图 1-2 所示，这从数学观点来说，在平面上画出类似圆周的图形，就是利用了圆周把平面分成内、外两部分的这个拓扑学定理．被围困的动物，只要它不能突围，仅仅在圆周内部活动，我们的祖先就能够捕捉到它们．平面由圆周分成内、外两个部分的这种几何直观性质是拓扑学的典型问题．这样，在远古时代，我们的祖先就已经具有了拓扑学的知识．另外，当我们观察现



图 1-2

代的什么也不懂的幼儿的游戏时，也会看到同样的情况。这个例子使我们了解到，拓扑学是我们人类把那些非常朴素而又基本的图形的几何直观性质数学化的结果。

然而，为把这种直观性质作为数学清楚地表达出来，却经过了一个漫长的历史过程。譬如，人类发明了数、学会了计算、产生了欧氏几何学、开辟了分析学，并且把数学的进展推进到以集合论为起点的数以外的领域。刚才叙述的定理，就是所谓“约当（Jordan）曲线定理”，它在二十世纪二十年代已得到正确的证明。

继欧拉之后，作为拓扑学的业绩，在1833年前后有C. F. 高斯(Gauss)的工作。直到今天仍被认为是世界最著名数学家之一的高斯，研究了空间中的各种各样的纽结问题，并应用沿纽结积分的方法，证明了下面两个纽结的成结方法是不同的。

后来在1851年，历史上非常著名的数学家G.F.B. 黎曼(Riemann)，进行了黎曼面的研究。这项研究工作虽然属于所谓复变函数论这一数学分支，但是这种函数论的研究，现在看来，实际上也可以说是对曲面这个特殊空间的结构进行的拓

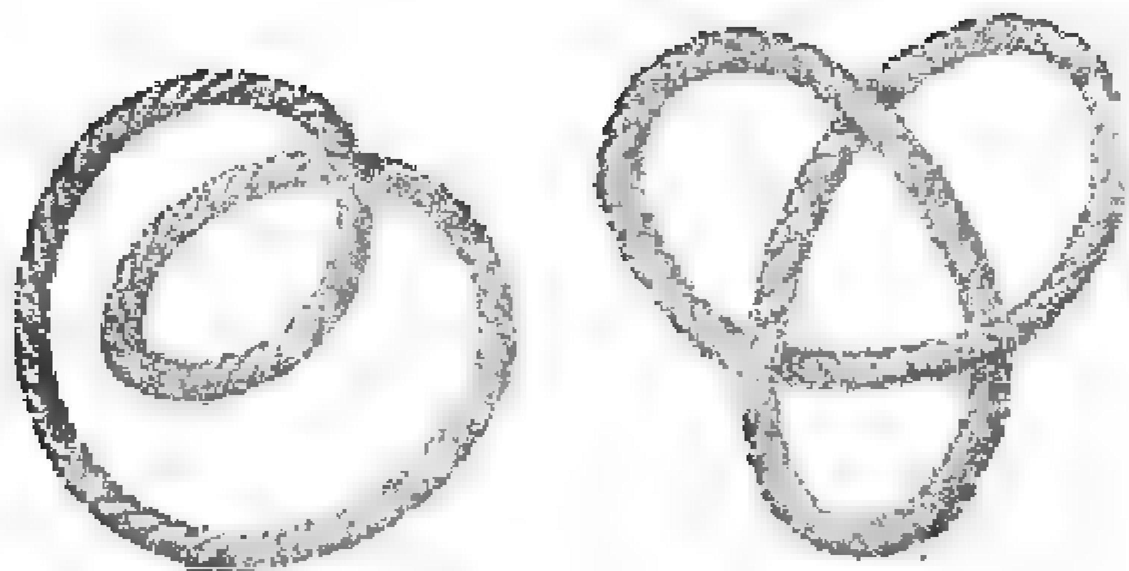


图 1-3

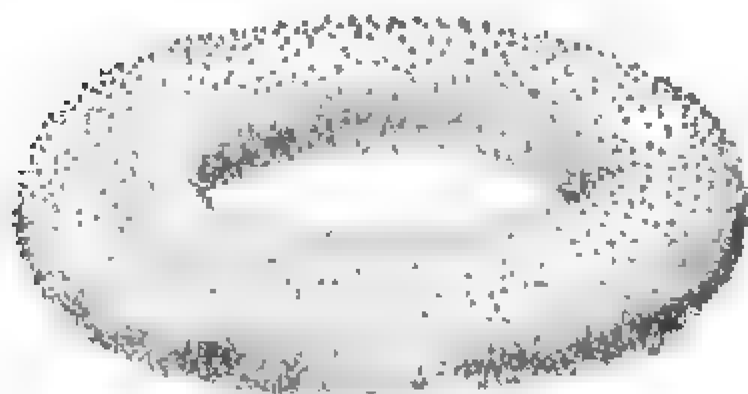


图 1-4

$w^2=(z-1)(z-2)(z-3)$ 的黎曼面

扑研究。

到了十九世纪末，数学中进行了非常大的改革。那就是G.康托尔（Cantor）开创的集合论。象在高等学校[1]学到的那样，集合是看做某种事物的汇集，集合论是研究它们的并集和交集等等的数学，其中出现了映射的概念。集合与映射这两个概念是构成以集合论为基础的一切现代数学的最基本的概念。

1）日本的高等学校相当于我国的高中。——译者注

到十九世纪为止的古典数学，除几何学外，大部分以数为研究对象．例如对自然数，求它们的和、差以及公因数…，这是算术．考虑实函数，对它们进行微分、积分…，这是所谓微积分或者叫做分析学的数学分支．由康托尔创始的集合论，使数学的对象不仅限于自然数、实数或复数等等的数，而是包括数在内的具有某种性质的事物的集合，这样就具有非常广泛的一般性．几何学虽然不是以数，而是以点、直线、平面、空间、二次曲线以及二次曲面等为对象，但因它们也是集合，所以按这种广泛的观点，可以把以前分别研究的几何学、代数学、分析学统一起来看待．

在康托尔创建的集合论中，首先引进了关于集合的运算．于是，称为群、环、域的所谓代数系统就成为数学的一种研究对象．例如，我们考虑实数集，若设想两数之间的加法为一种运算，而对实数施行这种加法运算，则实数集对加法运算构成群．再考虑中心固定的圆盘的旋转运动的集合，若规定各个运动的合成作为它们乘积的运算，则旋转运动的集合也构成一个群．

这种代数系统，是着眼于运算的所谓近世代数的研究对象，然而在集合上附加别的概念，就可构造出新的几何学的对象．为此，我们先考查直线．如在中学[1]所学的那样，在直线上适当确定一点，使它对应数 0，并把它叫做原点 O．在点 O 的右侧取一点，并使之与数 1 对应．其次，在原点到与数 1 对应点的同一方向上取与 1 恰有相同距离的点，使之对应数 2，继续这样做下去．同时，在相反的方向也这样做，使得所取的点与数 -1，-2，…对应．这样一来，就能够给直线上的各个点引入坐标．而且在这样的直线上，若取任意两点 a，b，就可

1) 日本的中学相当于我国的初中．——译者注

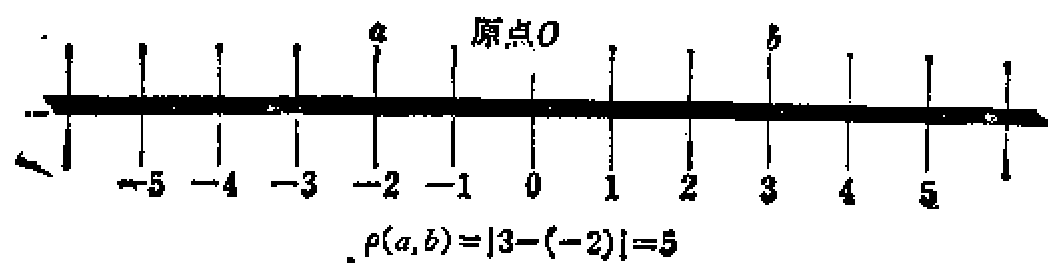


图 1-5

把这两点的坐标差的绝对值规定为它们的距离 $\rho(a, b)$． 例如，当点 a 是数−2 对应的点，点 b 是数 3 对应的点时，a，b 间的距离，如图 1-5 所示，就可算出是 5． 这样一来，直线就是直线上的点的集合，同时若取其中两点，就可确定它们之间的距离，直线可看做有了距离概念的集合．这和代数系统是具有运算概念的集合是一致的． 由此可见，在任何非数的一般集合上，适当地规定所谓距离的概念，它就成为前所未有的新的几何学的对象． 这样一来，就能得到作为现代几何的新对象的拓扑空间．

这本书虽然是从刚才叙述的拓扑空间的漫谈开始的，但是拓扑学也可以说是研究拓扑空间性质的现代几何学．这种拓扑空间的研究方法，是本世纪初，确切地说是在 1906 年，由法国的 M. 弗雷谢（Fréchet）等人的提倡和研究开始的．

在此之前，于1895年，庞加莱以“关于位置解析”为题，发表了数篇论文．这些论文对现代几何学的对象——拓扑空间开始了代数的研究．它是人类知识发展的一个里程碑．拓扑空间在我们的日常生活中就有，例如桌子的表面，铅笔的表面以及各种各样的构成形体图形的表面． 于是，拓扑学要研究世界中存在多少种不同的曲面．例如，让我们先考查一下卵的表面．卵具有椭圆面那样的形状． 在此，若把卵的表面看做是由理想的弹性体作成的，而且对它适当地进行整形，它就可以成为一个规整的球面． 另外，再取火柴盒看一看． 虽然它

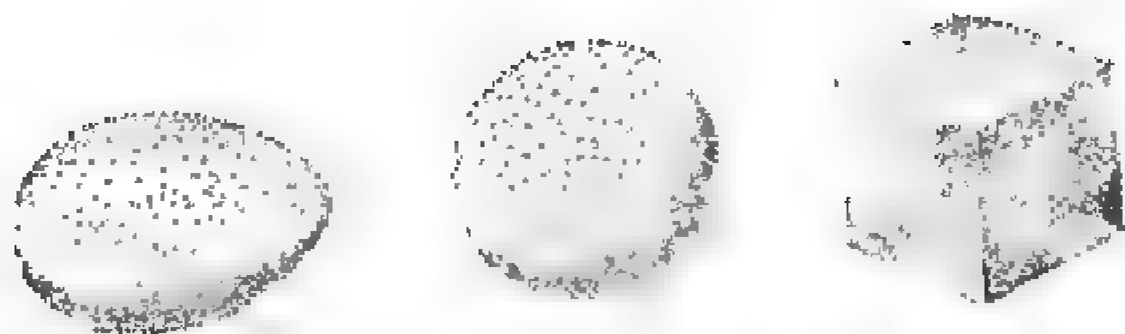


图 1-6

的表面是有棱角的长方体的表面，但若把它想象为是由理想的弹性膜作成的，中间充满空气，把它吹鼓并且适当地进行整形的话，它也能成为球面。这样，拓扑学把所有曲面都想象为是由理想的弹性膜作成的，随意地延展和收缩，就可以极其自然地把一个曲面变成另一个曲面。例如卵的表面和火柴盒的表面可以看做是相同的曲面，即球面。要想大致地把曲面加以区别，那就应当研究有多少不同的曲面。由于理想弹性膜的变形过于随意，或许能使我们认为，好象所有的曲面都是相同的了。那么，现在让我们用轮胎来代替卵。我们一看就知道轮胎的表面和球面是很不相同的形态。再拿带有两个或三个洞的“圈饼”来看，它们与球面是大不相同的。并且和轮胎表面(环面)相比也有不同的形状。实际上这种“圈饼”曲面、环面和球面，它们都是互不相同的曲面。总之，用弹性膜制成的轮胎表面，不论怎样扭曲，也不会变形为球面。若不是勉强去做，使在某处把曲面切断，再把切断的地方缩成一点，那样极不自然地强制的变形，那么环面就不可能变成球面。并且“圈饼”曲面也不可能变形为环面和球面。在这个世界中，究竟存在多少不同的曲面，这个问题到 1925 年时，才被彻底解决。

虽然现在讲的是曲面，而我们在拓扑学中所研究的并不限于曲面。从拓扑学的角度来看，曲面几乎和平面相同，它是

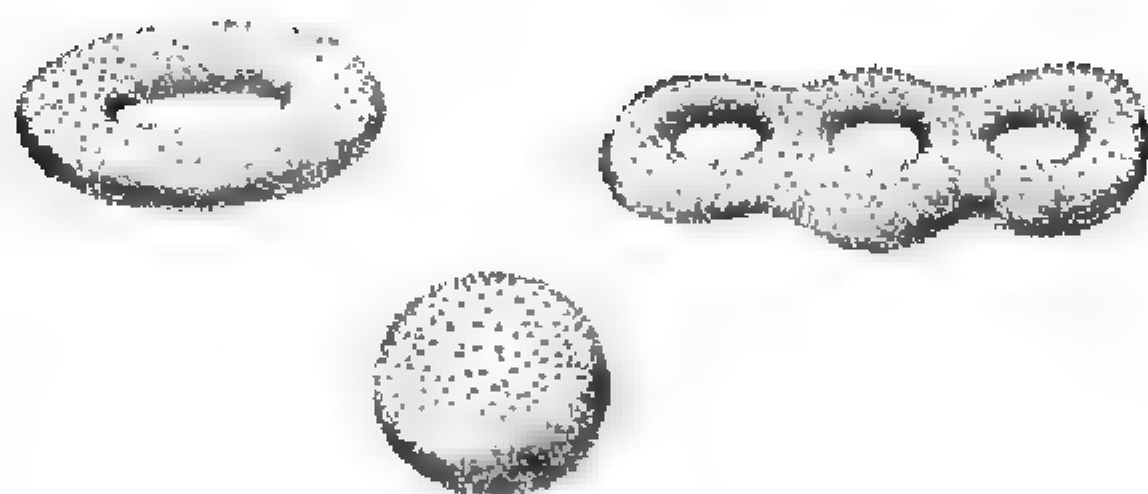


图 1-7

二维几何学的对象。可是数学不仅研究二维的，一般也研究三维、四维、五维以及任意的 n 维的，而且最近还把无穷维的几何图形也作为研究的对象。在研究二维曲面的时候，可以把环面和“圈饼”曲面等适当地捻弄揉合，总是可以看得见想



图 1-8

得出的．而考虑三维、四维、五维以至 n 维，甚至是无穷维空间时，我们是不可能用眼睛看到它们的．从而，必须为我们的直观建立坚实的理论基础．

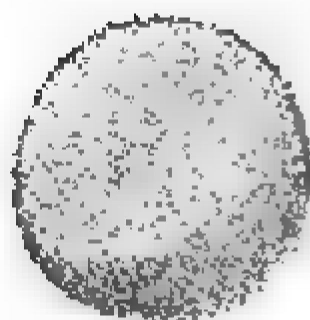
曲面，实际上是拓扑空间的极特殊情形，它与其它一般拓扑空间相比较，有显著的特点．其特点，象下面那样考虑是容易明白的．让我们考查一下平面上的一个小虫．假如小虫是近视眼．当它向平面的四周望去，它只能见到象图中那样的一块小圆盘，它看不到远处．现在把同一个小虫放到轮胎上，而不是平面上，让它观望一下轮胎的表面．确实与以前不同，小虫在弯曲的面上了（由于不是物理学，我们不考虑重力）．可是，它所观望的范围，和它在平面上所见到的小圆盘是相同的．在前面说过，拓扑学是把所有的面看成理想的弹性膜作成的，从这个观点来看，若把少许弯曲的弹性膜拉平的话，那么小虫所见到的景象和它在平面上见到的也是相同的．这样不论曲面是什么样的，在它上面任意点的邻近，和平面上任意点的邻近应当有完全相同的构造．因为拓扑学是研究任意空间的几何学，所以拓扑学所研究的对象就不限于前边说过的二维的情况．当然还研究三维、四维以及无穷维的几何对象．在这种对象中，也和曲面的情形一样，若某一点的邻近恰好是三维的，就可看做和我们居住的空间中点的邻近一样是球体，或者看做球形作成的拓扑空间．象这样特殊的三维拓扑空间，我们把它叫做三维流形．因而，曲面可以称为二维流形．若把这种方法加以推广，我们就能够研究所谓 n 维流形这种空间．

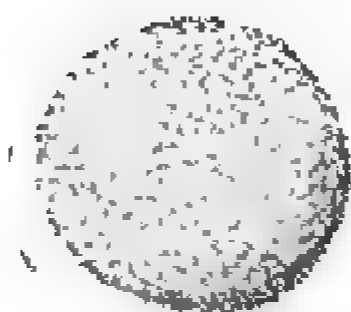
这种 n 维流形，不仅在拓扑空间中是重要的，而且是在广泛的数学领域中到处出现的概念．因此，拓扑学以 n 维流形的研究为一大支柱而发展起来．

我们继续谈流形．溯本求源，拓扑学的进展，是根据庞加

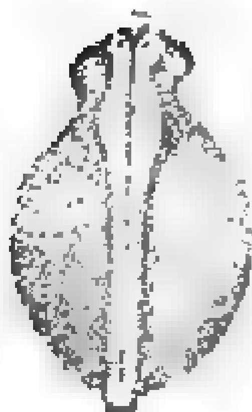
莱的建议，首先研究了同调论、基本群论，到二十世纪三十年代同调论已大体完成. 从二十世纪三十年代起，研究了基本群及其扩张的同伦论，并得到许多极完美的成果，对数学的发展起了很大的作用. 可以说从本世纪初起到二十世纪五十年代初，拓扑学是以两种方法作为主流而进行研究的，那就是康托尔、弗雷谢创始的采用拓扑空间方法的点集拓扑学以及由庞加莱创议的所谓组合拓扑学或代数拓扑学. 随后，到了二十世纪五十年代，迎来了拓扑学急剧发展的时代. 也就是，在这个年代中，美国的 M. 莫尔斯(Morse)把微积分(特别是变分学)的方法引入了拓扑学. 微积分也称分析学，而牛顿(Newton)、莱布尼兹(Leibniz)、欧拉、贝努利(Bernoulli)以及黎曼、维尔斯特拉斯(Weierstrass)，当然还有高斯，他们都是分析学研究的中心人物. 这些大数学家所研究的分析学，是数学中的主要支柱，并且被认为是最强有力的数学工具. 因为这种强有力的武器"分析学"被引入了拓扑学，所以一种新的拓扑学，所谓微分拓扑学，就在五十年代产生了. 当时，美国的青年数学家 J. 米尔诺(Milnor)，S. 斯梅尔(Smale)，法国的托姆等等大数学家发表了一些新论文. 到了二十世纪六十年代，可以说是微分拓扑的极盛时期，高维流形的性质也陆续搞清楚了.

现在，这些微分拓扑的成果，不仅在拓扑学中，而且在数学的各个分支中都得到广泛的应用. 例如，最近的一些拓扑学的结果，被应用于偏微分方程的理论中. 由于使用微分拓扑的方法，偏微分方程理论现在正飞跃地发展着. 另外，托姆和 E. C 季曼(Zeeman)等人把拓扑学的概念和方法应用到数学以外的领域，并且发表了能够说明实际的物理现象和生物现象以及关于生物的发生、形态形成、遗传以及繁殖等等的研究成果.





?



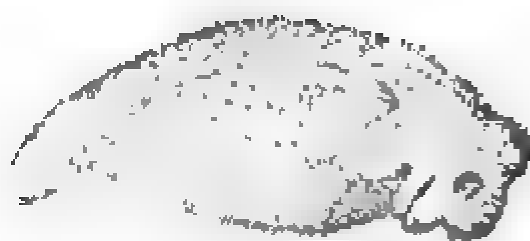


圖 1-9

第二章　集　　合

§1　集合

如在高等学校学过的那样，所有实数的汇集，大于 1 的所有实数的汇集等，都是数学研究的对象。由于把具有某种性质的“事物”汇集起来研究，会带来各种各样的方便，于是，我们把这种“事物”的汇集叫做集合。因为这里所说的“事物”可以是任何东西，所以集合并不是只研究数的汇集。在我们的日常生活中所表现出来的各种各样的“事物”，如食品、衣物等都可构成集合。例如，下面表格中的那五个人是林家家族的成员。若把每个人作为一个元素，这个家族就构成所谓林家的集合。我们可以把人的集合叫做成员的集合。在柜子中的衬

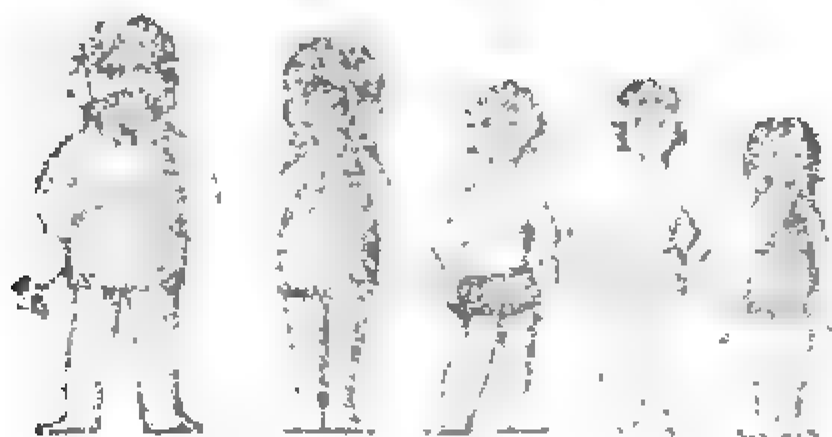


图　2-1

衣、罩衫、袜子、裤子等等是衣物的集合。另外，林家的集合可如下表示，林家 ＝{秀治，美代子，秀雄，洋，阳子}。这种表示还可以简化，而且为了使它具有一般性，如表的右栏那样，可把每个人改用记号 A，B，C，…表示。于是，可把所谓林家

父	林秀治	A
母	美代子	B
长子	秀雄	C
次子	洋	D
长女	阳子	E

的这一集合(没有什么特别理由)用大写的字母 H 表示。因此，林家的集合 H 就可用数学记号表示出来:

$$H=\{A, B, C, D, E\},$$

在这里，用林家 = {秀治，美代子，秀雄，洋，阳子}表示林家的集合已经很清楚了，为什么还用数学形式表示成 $H=\{A, B, C, D, E\}$，这有什么意义呢，这也许是对数学不够理解所产生的想法。之所以用数学形式表示，是因为日本文字并不是世界通用的。而且，由于数学即不是人类学，也不是社会学，所以它并不研究家族问题。偶尔用家族问题作为数学的例子，是为了研究它的形式或概念。因此，与其写做不是数学固有名词的林家，不如采用非常一般的普遍适用的简单记号 H。因而，在研究集合时，仅考虑家族和柜中衣物等具有的共同性质，无需特别注意构成集合的每个"事物"的性质。同样地，可以考虑以日本数学会的所有会员或者以某一机械运行的所有动作作为元素的集合，等等。

当说到集合是"事物"的汇集时，必须十分注意的是，作为集合的"事物"，从理论上来说，我们必须能够全部判断出来。例如说，活动着的东西的集合，那么动物属于这个集合，但植物以及从山上滚落下来的岩石等是否属于这个集合就不清楚。因此，尽管怎么说是……集合，但是活动着的东西的集合仍不是这里所说的数学的集合。

再补充一句多余的话．不论林家也好或柜中的衣物以及自然数也好，都同样可用集合的概念处理，按这种看法，也许有一种唯恐脱离实际，否定所有价值观念的思想．然而，数学家为了在诸多事物之中选择那些共同的内在性质，为了寻求能够无例外地适用于任何东西的一般原理，才确定了集合的概念．

§2 有限集·无限集

当已给某一集合时，构成这个集合的每个"事物"叫做这个集合的**元素**，也叫做**要素**、**成员**或**点**．使用什么名称是任意的，这取决于使用人的喜好以及集合的实际情况．但是，一般在数学中，当讨论几何问题时习惯上常称为点，当讨论代数问题时常称为元或元素，显然不是语言是否严密的问题，而是细微差别的问题．

集合分为两种，如前面说过的林家的家族，它的元素是有限多个，而所有大于1的实数集，它的元素是无限多个．前者叫做**有限集**，后者叫做**无限集**．因此，表示有限集，如林家的例子

$$H=\{A, B, C, D, E\},$$

在{ }中，集合的所有元素都可以排列出来．但是，一般来说，有无限多个元素的集合，在{ }中把所有的元素写尽是不可能的．例如由大于1的整数构成的集合，即

$$\{1, 2, 3, \cdots\},$$

这一集合的元素是写不尽的，因此把这种情况用…表示．在{ }中无论什么样的集合都可明确地表示出来．（若上边的写法实在不清楚时，也可写成

{自然数的全体}．

究竟怎样写才算清楚，还要看在什么地方以及怎样理解．在

数学中，若写出$\{1, 2, 3, \cdots\}$，就理解为{自然数的全体}。)

在此，让我们再考虑某一集合．该集合是怎样的集合都没关系，因此可用和已知例子无任何关联的简单记号

$$X$$

表示，现在从所考虑的集合X中取出一个元素，用x表示(当然也可用a, z, A, Z表示)。当x是X的元素时，可写做

$$x \in X,$$

这个记号表示x是属于X的．现在，取不属于X的一个"事物"y，这时用记号

$$y \bar{\in} X \text{ 或 } y \notin X$$

表示．也就是，$y \bar{\in} X$表示y不是X的元素．在前面的林家的表中，因为A是林家家族的成员，所以属于H，从而$A \in H$．但与林家不同的如山田家的直子z，因为她不是林家的家族，所以$z \bar{\in} H$．当用这种记号，考虑刚才说的集合X时，必须注意的是，构成集合X的元素是明确定义了的，也就是不论怎样的x，采用什么方法，$x \in X$和$x \bar{\in} X$必须是能够明确（数学的）断定的。

根据这种想法，为了表示集合X，常常采用下面的写法

$$X = \{x \mid p(x)\} \text{ 或 } X = \{x;\ p(x)\},$$

这里的$p(x)$是构成集合X的每个元素x应满足的性质或条件。例如，我们一写出

$$J = \{n \mid n \text{是自然数}\},$$

就知道J是自然数集．若写出

$$E = \{2n \mid n \in J\},$$

则它表示偶自然数集$\{2, 4, 6, \cdots\}$。

在此，必须注意一个容易忽略的问题．所谓集合，因为它是某种"事物"的汇集，所以考虑集合时，总认为它的元素是存在的．但是，如即将在后面叙述的那样，在处理集合概念的

一些场合，把不含任何元素的汇集看做一个集合是很方便的.我们把没有任何内容的这种集合叫做**空集**. 空集常用记号$\varnothing$表示.

§3 包含关系

关于刚才提到的林家的集合 H，我们来考虑其双亲以及只有孩子们的两个集合 H_1，H_2，即

$$H_1=\{A, B\},$$
$$H_2=\{C, D, E\},$$

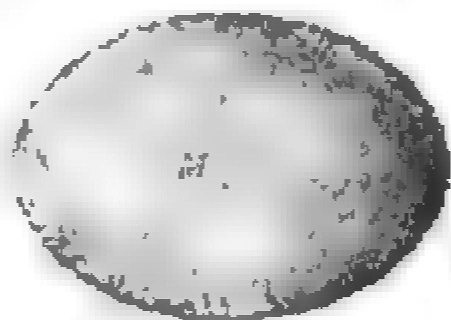
而这两个集合 H_1，H_2 的不论哪一个元素，都属于原来林家的集合 H. 这一事实可如下表示

$$H_1\subset H, \quad H_2\subset H.$$

一般来说，当集合M的所有元素都属于集合N时，叫做集合M被集合N所**包含**，或叫做集合M是集合N的**子集**，并用记号

$$M\subset N \text{ 或 } N\supset M$$

表示. 这一点与下面的说法是相同的: 若 $x\in M$，则必有 $x\in N$时，就可以肯定地说$M\subset N$. 刚才考虑过的无限集合的例子，若设自然数集为 J，偶数集为 E，而所说的偶数 2，4，6，…显然是自然数，因此有 $J\supset E$. 这样一来，就确定了集合之间的$\subset$关系. 我们把这种关系叫做**包含关系**. 如果把集合 M，N的元素看做平面上的点，那么 M，N就是平面的一部分，而集合 M，N的这种包含关系，就可如图 2 2 那样象征性地表示出来.这种表示集合所用的略图，我们叫做文氏图 (Venn diagram). 用文氏图来表现集合，在数学中虽然不是那么确切，但对于我们考虑



$M\subset N$

图 2-2

问题还是很有帮助的。

其次，设 M，N 是两个集合，而且 $M \subset N$，$N \subset M$．因为 M 的元素属于 N，所以 M 的元素同时也是 N 的元素．反之，因为 N 含于 M，所以 N 的元素同时也是 M 的元素．因此，集合 M 和集合 N 的元素完全一致，所以，M 和 N 是由完全同样的元素构成的集合．在这种情况下，我们说集合 M **等于**集合 N．也就是，当构成两个集合的元素相等时，就称这两个集合是相等的，并写做 $M = N$．$\left(\text{这是把 } 2 = \frac{8}{4}\right.$ 等表示数相等的记号，照样用于集合．但集合的相等 $M = N$ 比数的相等意义更广泛．$\Big)$

在此，需要注意一点．当 $M = N$ 时，N 的元素必含有 M 的元素，所以 $M \subset N$ 当然成立．然而，当 $M \subset N$ 时，一般分为 M 等于 N 与它们不等的两种情况．为了把它们区别开，当 M，N 不等 $(M \subset N)$ 时，就说 M 是 N 的真子集．所谓 M 是 N 的**真子集**，是指 M 不是空集，$M \subset N$ 且 $M \neq N$．这也可写做

$$M \subsetneqq N \quad 或 \quad M \subsetneq N,$$

上面的文氏图，实际上是表示 $M \subsetneq N$ 的．

当 M 是 N 的真子集时，因为 $M \neq \varnothing$，$M \subset N$ 且 $M \neq N$，所以当 $M \subset N$ 时，$N \subset M$ 不成立．由此，当 $M \subset N$ 时，则 N 中必存在不属于 M 的元素．

例如在林家的例子中，因为 $H_1 = \{A, B\}$，$H = \{A, B, C, D, E\}$，所以显然有 $H_1 \subset H$，但因元素 C 只属于 H，而不属于 H_1，所以 $H_1 \subsetneq H$．又如，偶数集 E 含于自然数集 J，但因 1 是 J 的元素而不是 E 的元素，所以 E 是 J 的真子集．

§4 集族

有关集合的问题，大致到这里可以结束．但是，我们再提

出几个重要的需注意的问题．例如，我们来考虑林家、山田家、石井家、木下家的集合 $\mathfrak{F}$．此集合 $\mathfrak{F}$ 的元素是林家、山田家等的一些家族．但是，如上所述，林家 $H=\{A, B, C, D, E\}$ 是人的集合．就是说，集合 $\mathfrak{F}$ 的每个元素分别是某一集合．因为每个集合都可看做某一“事物”，所以 $\mathfrak{F}$ 确是真正的集合．这种每个元素都是集合的集合，通常叫做**集族**，而 $\mathfrak{F}$ 是以家族集合为元素的集族．（一个集合，当它的元素是集合时，它仍为集合．为了反映集合的集合这种意思，用德文字母来表示集族．虽然没有什么这样做的必要，但这意味着枯燥的数学也是一种满好的文学．）

显然，对集族来说，它的元素（集合）的个数不必都是有限的，它的各个元素也没有必要都是互异的．当 J 是自然数集时，若规定

$2J=\{2n \mid n\in J\}$，即偶数集 E，

$3J=\{3n \mid n\in J\}$，即 3 的倍数的集合，

………………

……………

等等，则

$$\mathfrak{J}=\{J, 2J, 3J, 4J\cdots\}$$

是由无限个集合构成的集族，它还可写做

$$\mathfrak{J}=\{nJ \mid n\in J\},$$

集族 $\mathfrak{J}$ 叫做以集合 J 为**指标**的集族．

现在，让我们举一个集族的特例．当考虑任意一个集合 X 时，X 的子集全体构成一个集族．把它用记号 2^X 表示，它叫做 X 的**子集的集族**．例如，取一个特别的集合 X，

$$X=\{a, b, c\}$$

是由三个元素构成的有限集．它的子集的集族是

$$2^X=\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\},$$

由八个成员组成．在此，这个集族之所以用记号 2^X 表示，是因为 X 是由三个元素构成的，而它的子集有 $2^3=8$ 个．

其次，若 X 为有限集，它的成员的总数就可确定．例如，林家的集合 H，它的成员总数是 5．当集合 X 是无限集时，它的成员总数是不能确定的．例如自然数集

$$J=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$

它的成员总数比任何自然数都大．正因为如此，J 才叫做无限集．然而，即便是同为无限集，如偶数集

$$E=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots\}$$

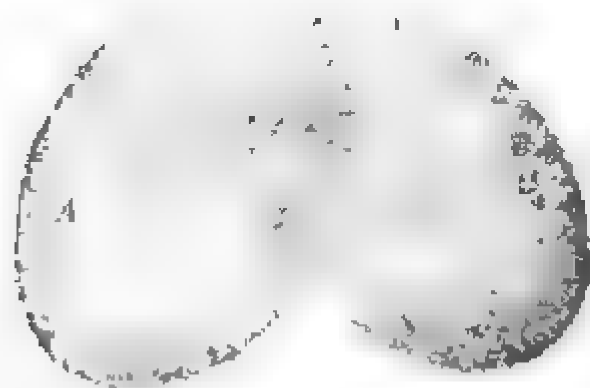
和实数集 R，很明显是有本质差异的两个集合．也就是说，若使 E 的成员，如 2 对应 1，4 对应 2，一般地，$2n$ 对应 n，则无限集 E 的每个成员都可记上序号 1，2，3，4…．把这种无限集叫做**可数无限集**或**可列无限集**．而且，我们说，这种集合的基数是 $\aleph_0$（$\aleph$，读作阿列夫），前边的林家的集合 H 的成员总数是 5 就表示这种意思．即，集合基数的概念，在有限集合的情形下，就是集合成员的个数，在无限集合的情形下，它的成员总数是不可能确定的，因此导入一个新名词"基数"和新记号 $\aleph_0$，它好象是表示无限集成员个数的．实际上，实数集 R 是它的成员怎么也不能记上号数 1，2，3，…的无限集．这种集合叫做**不可数无限集**或**不可列无限集**．而且说，实数集具有连续基数，用 ω 表示．无限集的基数 $\aleph_0$，ω 等是表示各种无限集的程度的．在 $\aleph_0$ 与 ω 之间，是否还有其它无限集的基数呢，这是个有名的称为连续统假设的集合论中的一个难题．这个问题是由集合论的创始者康托尔约在一百年前提出来的．但在 1963 年，被 P.J. 柯亨(Cohen)解决了．答案是：在 $\aleph_0$ 与 ω 之间其它种类的无限集的基数，有也好，无也好，对数学的其它部分没什么影响．这种意外的结论，引起全世界数学家的惊讶．关于集合基数这类问题不再继续讨论了，到此，大致结

東.

§5 集合的运算

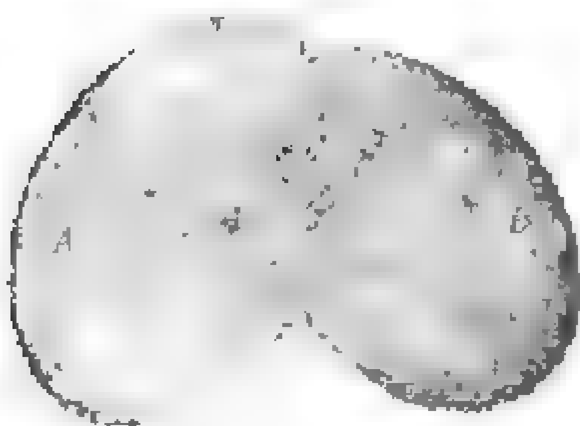
已知二数 a, b，它们的积 ab 与和 $a+b$ 这类的运算，我们已经熟悉了．同样可以考虑集合的运算．

首先，考虑两个集合 A 和 B，同时属于两个集合的元素的集合，叫做集合 A 和 B 的**交集**．即交集的元素既属于 A 又属于 B．交集用记号 $A \cap B$ 表示．



$A \cap B$

图 2-3



$A \cup B$

图 2-4

从而，

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

用文氏图表示如图 2-3．对于集合 A 和 B，属于 A 的或属于 B 的元素的全体构成的集合，叫做 A 和 B 的**并集**，且用 $A\cup B$ 表示．于是

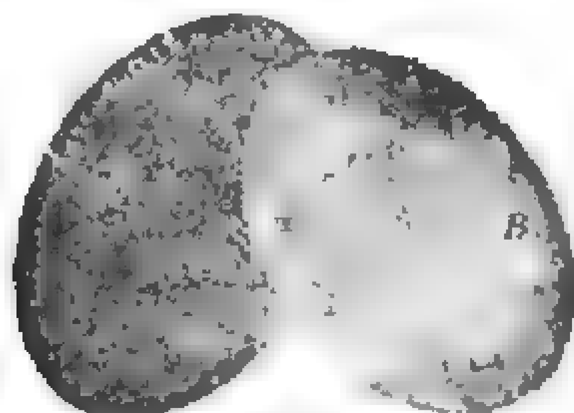
$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

它的文氏图如图 2-4．

作为集合之间的运算还有 $A-B$（也有用 $A\backslash B$ 表示的）．这是从 A 去掉 B 的集合，或叫做在 A 中 B 的**补集**，它表示属于 A 而不属于 B 的那些元素构成的集合．即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\},$$

若用文氏图表示，则如图 2-5．



$A-B$

图 2-5

上边的并集、交集、补集的运算，若用在前边说过的林家的集合上，则有

$$H=H_1\cup H_2,\quad H_1\cap H_2=\varnothing,\quad H-H_1=H_2.$$

从第二式可知，把"空集"也看做一个集合是很方便的．另外，自然数集 J 与偶数集 E，就它们的关系来看，应当有

$$J-E=\{1,3,5,\cdots\}$$

（奇数的集合），

这样一来，用上述确定的三种运算，可以得到各种集合的运算公式．例如

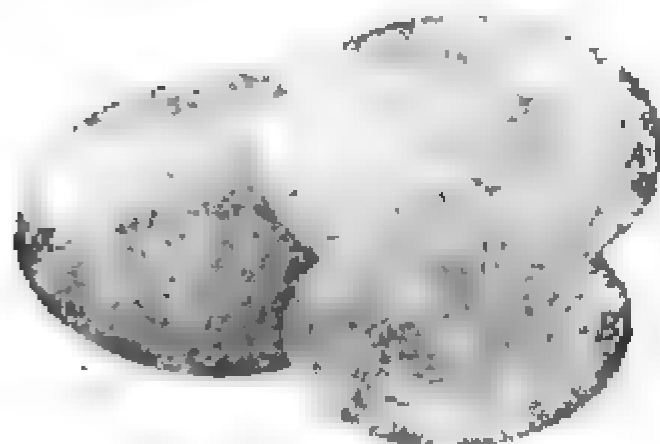
$$(1)\ X-(A\cup B)=(X-A)\cap(X-B)$$

成立。为了证明这个公式成立，根据集合相等的定义，必须证明

$$(a)\ X-(A\cup B)\subset(X-A)\cap(X-B),$$

$$(b)\ X-(A\cup B)\supset(X-A)\cap(X-B).$$

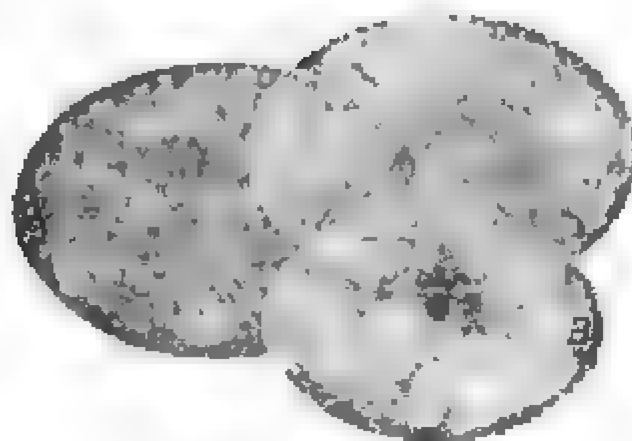
首先，(a)的左边用文氏图表示为



$X-(A\cup B)$

图 2-6

而右边用文氏图表示为



$(X-A)\cap(X-B)$

图 2-7

在文氏图中可以看出，右边和左边恰好一致。由文氏图知道了这一问题的内容，但要想确切证明还应如下去做。首先，要

想证明 (a)，只要说明左边的任一元素必属于右边即可，设

$$x \in X - (A \cup B),$$

则

$$x \in X, \text{ 但 } x \bar{\in} A \cup B,$$

由此，从后式可知 $\quad x \in A, \quad x \bar{\in} B,$

因而，有

$$x \in X, \ x \bar{\in} A, \text{ 即 } x \in X - A,$$

且

$$x \in X, \ x \bar{\in} B, \text{ 即 } x \in X - B.$$

因此，有

$$x \in (X - A) \cap (X - B).$$

于是证明了：

$$X - (A \cup B) \subset (X - A) \cap (X - B).$$

同样地，也可证明 (b)。 从而，得到

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B).$$

对这种推导，开始可能有些生疏，然而只要熟悉这个过程，即从 $\cup$ 和 $\cap$ 运算的定义出发认真去推导，当领会了的时候，也就不难了。但是，现在我们证明了的

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$

已超出了数集合的公式，我们已经达到了现代数学的领域。上面的公式 (1) 与下面的公式 (2) 合起来叫做**德·摩尔根** (De Morgan) **公式**。它是集合论的一个基本结果。另外，希望读者与前边同样地去验证下面的公式(2)也是对的。

$$(2) \quad X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B).$$

集合之间的运算 $\cap$，$\cup$ 是对两个集合定义的，但这种运算不仅对两个集合的集族而且对任意的集族也是可行的。 在此，我们考虑

$$\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$$

是由无限个集合构成的集族. 而且用记号 $\bigcup_i A_i$ 表示属于 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 任何一个的那些元素构成的集合，也就是

$$\bigcup_i A_i = \{x \mid x \text{ 是某一个 } A_i \text{ 的元素}, i = 1, 2, \cdots\},$$

把它叫做 $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ 的**并集**.

其次，在集族 $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ 的情形下，所谓它的**交集**，是指同时属于 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 的元素构成的集合，并用记号 $\bigcap_i A_i$ 表示. 它还可写做 $\bigcap_i A_i = \{x \mid x \text{ 是所有 } A_i \text{ 的元素 } i = 1, 2, \cdots\}$.

在数学中，这种概念一般尽量不用普通语言，而是经常用记号来反映我们的想法. 例如，刚才叙述的，x 是某个 A_i 的元素(即 x 至少是一个 A_i 的元素)，换句话说，至少存在一个 A_i 包含 x，若用英文写出，就是

There exists at least one A_i such that A_i contains x

这可用略写记号 $\exists A_i \ni x$ 表示. 于是 $\bigcup_i A_i$ 可写成

$$\bigcup_i A_i = \{x \mid \exists A_i \ni x, i = 1, 2, \cdots\}.$$

另外，若 x 是所有 A_i 的元素，也就是所有 A_i 含有 x，则可写做

All A contain x

它可略写为

$\forall A_i \ni x$

于是，$\bigcap_i A_i$ 可写做

$$\bigcap_i A_i = \{x \mid \forall A_i \ni x, i = 1, 2, \cdots\}.$$

前面讨论的集族 $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$，实际上，可写成 $\mathfrak{A} = \{A_i \mid i \in J\}$，把自然数集 J 作为指标. 但这里的指标完全没有必要限于自然数，一般可取任意集合 M 作为指标，这时集族可表为

$$A = \{A_\mu \mid \mu \in M\},$$

对此集族可如下确定它的并集与交集：

$$\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{x \mid \exists A_\mu \ni x,\ \mu \in M\},$$

$$\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x \mid \forall A_\mu \ni x,\ \mu \in M\}.$$

最后，我们来规定一个名词．设已给一般的集族

$$\mathfrak{A} = \{A_\mu \mid \mu \in M\},$$

所谓 $\mathfrak{A}$ 是**可分离的**，是指对于任取 $\mathfrak{A}$ 的相异元素 A_μ，A_ν，总有

$$A_\mu \cap A_\nu = \varnothing\ (\text{但}\ \mu \neq \nu),$$

例如，设 $\mathfrak{A} = \{O, E\}$，O 为奇数集，E 为偶数集，显然 $\mathfrak{A}$ 是分离的集族．一般说来，当 $\mathfrak{A} = \{A_\mu \mid \mu \in M\}$ 时，则需要注意：尽管有 $\bigcap_\mu A_\mu = \varnothing$，但 $\mathfrak{A}$ 不一定是分离的．

第三章　映　　射

§1　映射

下面，我们来讨论映射。在高等学校学过各种各样的“函数”。所谓函数，例如，可用形如

$$y=ax+b \text{ 或 } y=ax^2+bx+c$$

的式子给出。这里的 x 是取各种实数值的变数，而 a, b, c 都是常数。当变数 x 取某一值时，把这个值代入 $ax+b$，并把它计算出来，从而就确定了函数 y 的值。同样，若把 x 的值代入 ax^2+bx+c 进行计算，则函数值 y 也就确定了。这样，一次函数、二次函数以及以往学过的函数都可看做是：若给与某一实数值，对此值就可确定另一实数，而这种规则可用式子表现出来。

把这一事实，通过图形来观察一下。在平面上，取正交的 x 轴和 y 轴，对应 x 值在平面上就能确定具有函数值 y 的点 (x, y)。若画出函数图象，则一次函数的图象是“直线”，二次函数的图象是“抛物线”。在 x 轴上，由某值 x_0 确定一点，过该点引 y 轴的平行线，求出它与图象的交点。再通过此交点引横轴的平行线，就可求出它与纵轴的交点 y_0。于是，这点 y_0 的坐标就表示对应于变数 x_0 的函数值。

在这里，若以 R 表示全体实数的集合，通过上式和对图象的观察可知，所谓函数，就是使 R 的点 x 与 R 的一点 y 相对应的规则。特别是，一次函数、二次函数都是把这种对应用式子来表达的。

若把函数的这种想法稍加推广，那么所谓函数，就是只须

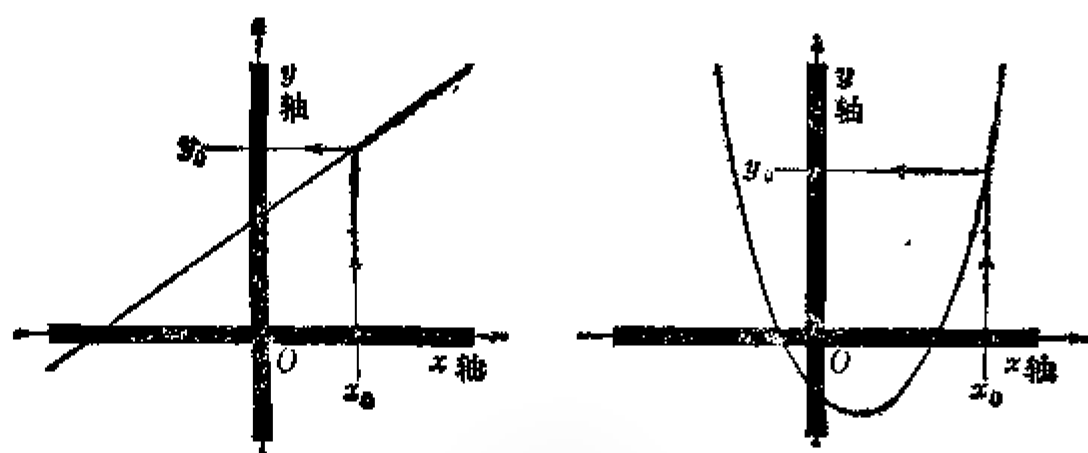


图 3-1

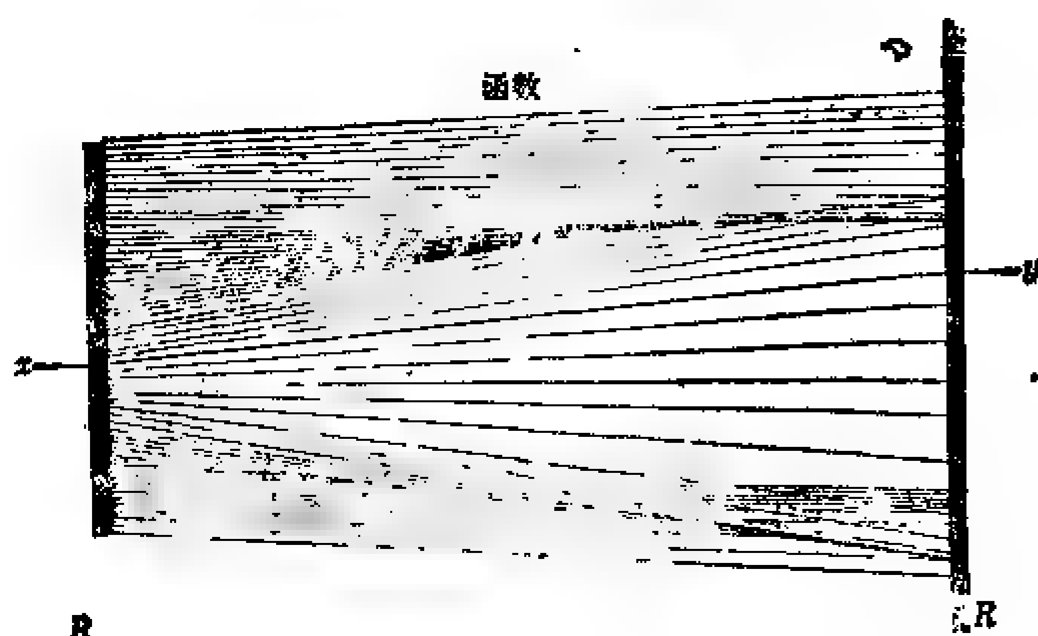


图 3-2

给出使集合R的点x与R的一点y相对应的规则即可，而且这种规则不必写成任何式子。因此，如图 3-2 所示，若把R看做竖线，则函数也可如图 3-2 那样用x与y连结的无数线段来表示。这样好象有些随便，其实只要给定一个规则，就可看做一个函数。这种广泛意义下的函数，虽然类似一次函数与二次函数那样能确定函数的图象，但图象一般不象直线和抛物线那样很整齐的图形。

按照不用任何式子表达函数的想法，则函数就不必仅以

数为对象，如我们在第二章中考虑过的集合，已是包含数以外内容的概念。所谓"函数"的概念，不仅限于数，对于集合也可以确定，这就是映射概念。首先，从例子说起吧。在前边讨论集合时，确定了所谓林家集合 H。我们把它分为"亲"与"子"这两个元素构成的集合 $H_0=\{亲, 子\}$来考察一下。若取林家集合 $H=\{A, B, C, D, E\}$ 的任意元素，则或是"亲"或是"子"之中的哪一个。若在集合 H 中取到亲，就使它与集合 H_0 的元素"亲"对应，若取到的元素恰好是子，就使它与集合 H_0 的元素"子"对应。这样一来，就使林家集合 H 的元素与 H_0 的元素之间确定了一个对应规则。这种情况，如果把前边的含有 x 的 R 换成 H，把含有 y 的 R 换成 H_0，就可看出与前边的一次函数、二次函数的情况是完全相同的。

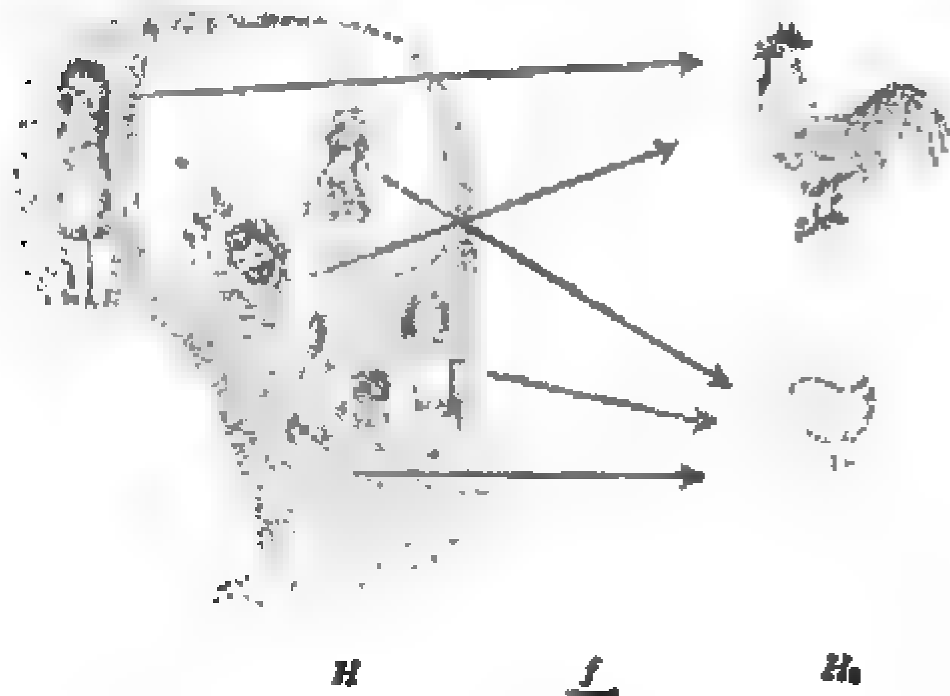


图 3-3

一般地，设 X 和 Y 是两个集合。若给与一个规则，使 X 中的任何元素 x 都能确定 Y 中的一个元素 y，则把这种规则叫做从 X 到 Y 的映射(也叫变换)。这样所谓"映射"的概念是把

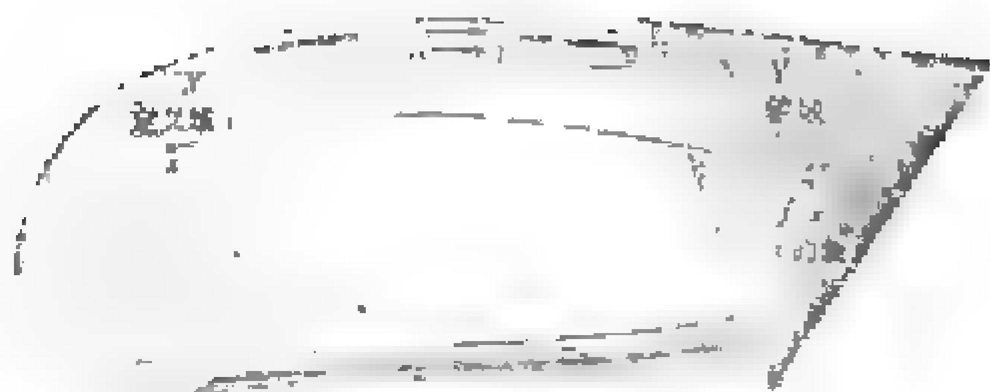


图 3-4

函数的研究方法推广到非数的一般集合上的。若改用记号来表示，则当 X 与 Y 是任意集合时，

$$f:X\to Y \text{ 或 } X\xrightarrow{f}Y,$$

也可以仅记作 f。 所谓从 X 到 Y 的映射，是指下述的一个规则 f，即对于 X 的每一个元素 x 有一个唯一确定的 Y 的元素 y 与之对应。由于 y 是由 x 确定的，所以 y 也可写做 $f(x)$。 而且若把映射用如下文氏图画出来，也许更易于理解。 这样看来，例如，对于自然数集 J，把它的元素 2 倍起来成为偶数，也就成为 E 的元素，即

$$(\times 2):J\to E,$$

这就产生了从 J 到 E 的映射(二倍起来的规则)。

总之，在高等学校学过的函数是映射的特别情况。因此，在本书中，特把

$$f:R\to R$$

的数集之间的映射叫做函数。 之所以用记号 f 表示映射，是因为 f 取自 function 的第一个字母。

§2 满射 · 单射 · 双射

当已给映射 $f:X\to Y$ 时，把集合 X 叫做映射 f 的区域或

定义域，而把 Y 叫做映射 f 的**值域**。当 f 是一次函数、二次函数时，它们的定义域和值域都是实数集 R。可是，如我们讲过的林家的例子等，它们的定义域与值域并不总是一致的。设 x 是映射 f 定义域的任意元素，与之对应的 Y 的元素 y 或 $f(x)$，把 $f(x)$ 叫做由 f 确定的 x 的**象**。进一步说，当给出映射 f 时，取 X 的任意子集 A，A 的象集用 $f(A)$ 表示。即 $f(A)$ 由

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

确定。若用文氏图表示，即

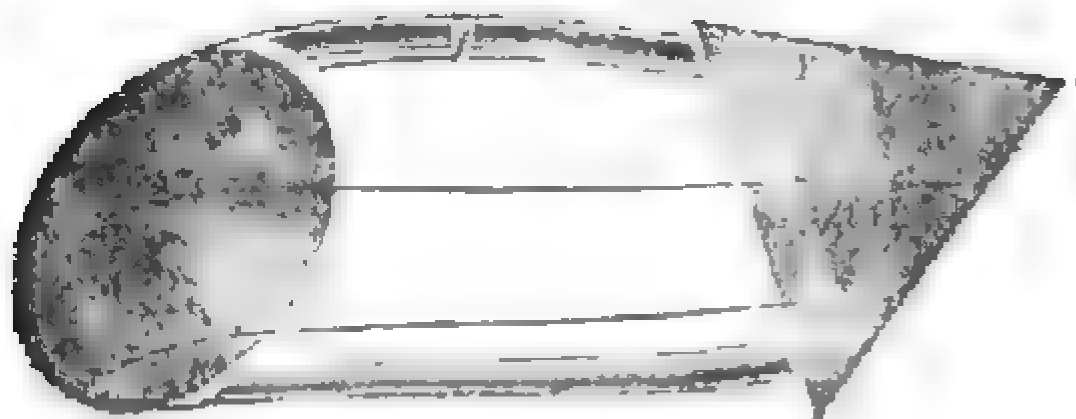


图 3-5

因为 $f(A)$ 是 A 由 f 映为 Y 的子集。于是，可知

$$(1)\qquad f(A\cup B)=f(A)\cup f(B),$$

然而，要考虑 $f(A\cap B)$ 时，在一般情形下，有

$$(2)\qquad f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B),$$

而"$=$"未必总成立。例如，考虑下面的例子。设

$$X=\{a, b\},\qquad Y=\{y\},$$

从 X 到 Y 的映射 f 由

$$f(a)=y,\qquad f(b)=y$$

确定（由于 Y 是由一个元素 y 构成的，所以无论如何也不能确定其它的映射）。这里，取

$$A=\{a\},\qquad B=\{b\},$$

于是 $$A\cap B=\{a\}\cap\{b\}=\varnothing,$$
因为空集由映射 f 映得的仍为空集，所以(2)式的左边是空集 $\varnothing$。即便如此，但因
$$f(A)=f(\{a\})=\{y\},\qquad f(B)=f(\{b\})=\{y\},$$
所以，有
$$f(A)\cap f(B)=\{y\},$$
即(2)式的右边为 $\{y\}$。由此例可知，在(2)式中，两边未必相等。如用文氏图表示，一般如下：

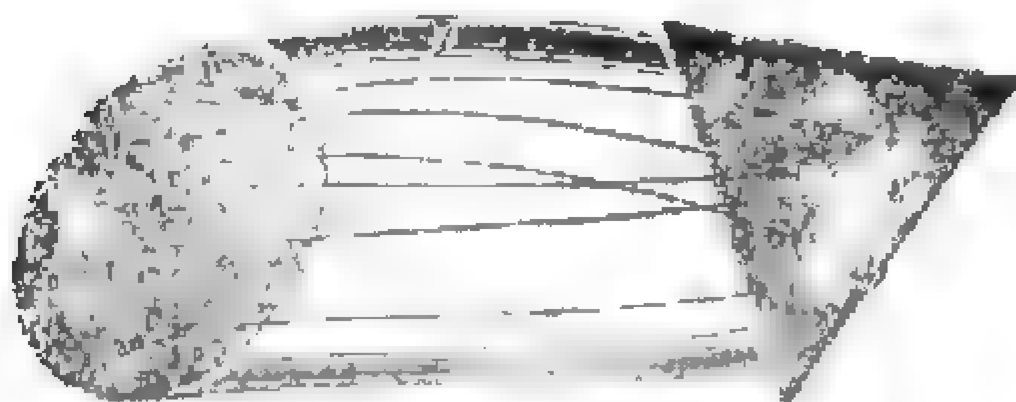
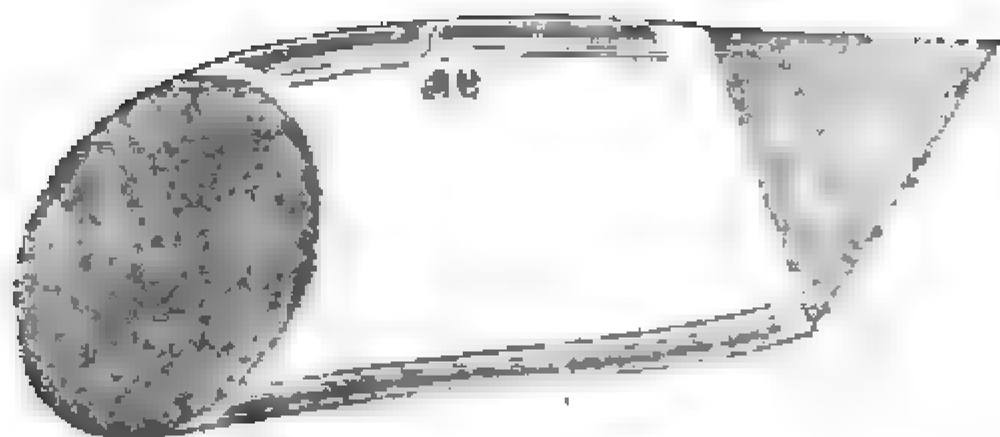


图 3-6

从此，我们将考虑各种各样的映射，如
$$f(X)=Y,$$
即 f 的定义域的象与值域 Y 一致，这时就说 f 是从 X 到 Y 上的映射。或用较新的说法，f 是从 X 到 Y 的**满射**（"满"就是"到上"的意思，"射"是指映射。事实虽然如此，但作为数学语言，一般不能把映射单独说成射）。对这一事实，如果反过来说，就是：当取值域的任意元素 y 时，由 f 映成 y 的 X 的元素 x 至少存在一个。用记号可写做
$$\forall y\in Y,\ \exists x\in X,\ f(x)=y$$
例如，前边讲过的林家的映射 $f:H\to H_0$ 就是满射。又如，刚才讲的 $X=\{a,b\}$ 时的例子也是满射。特别是，象这样的例



到上的映射

图 3-7

子，把 $f(x)$ 映成一点的映射叫做常值映射．现在考虑，对于映射 $f: X \to Y$，Y 的任意子集 B．而 B 在 f 下的逆象 $f^{-1}(B)$，是由 f 映到 B 内的 X 的元素的集合，也就是由

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B,\ x \in X\}$$

定义的．有时也把逆象叫做原象．它可用文氏图表示如下：

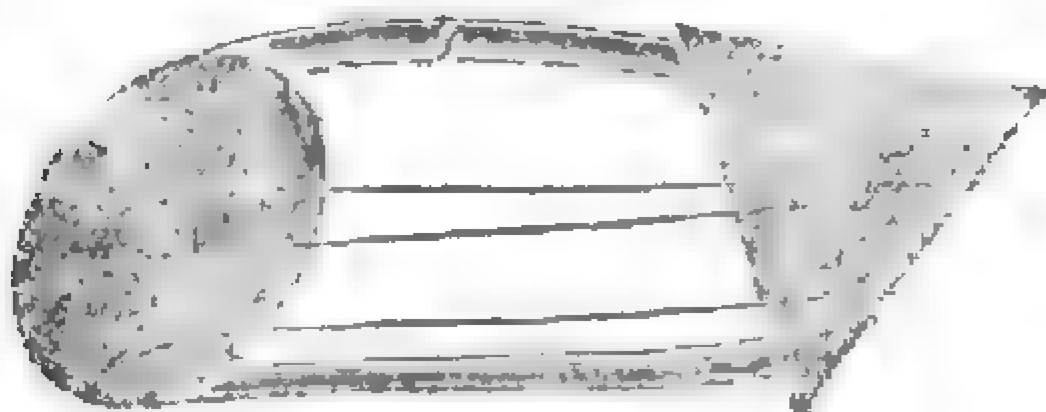


图 3-8

特别是，当 B 是由一个元素 y 构成的集合 $\{y\}$ 时，B 的逆象 $f^{-1}(B)$ 叫做元素 y 的逆象，并用 $f^{-1}(y)$ 表示　关于逆象，和前边讲过的与象有关的性质 (1)，(2) 类似的式子是成立的．在这种情况下，有如下整齐的关系：

(1)$^{-1}$　$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$，

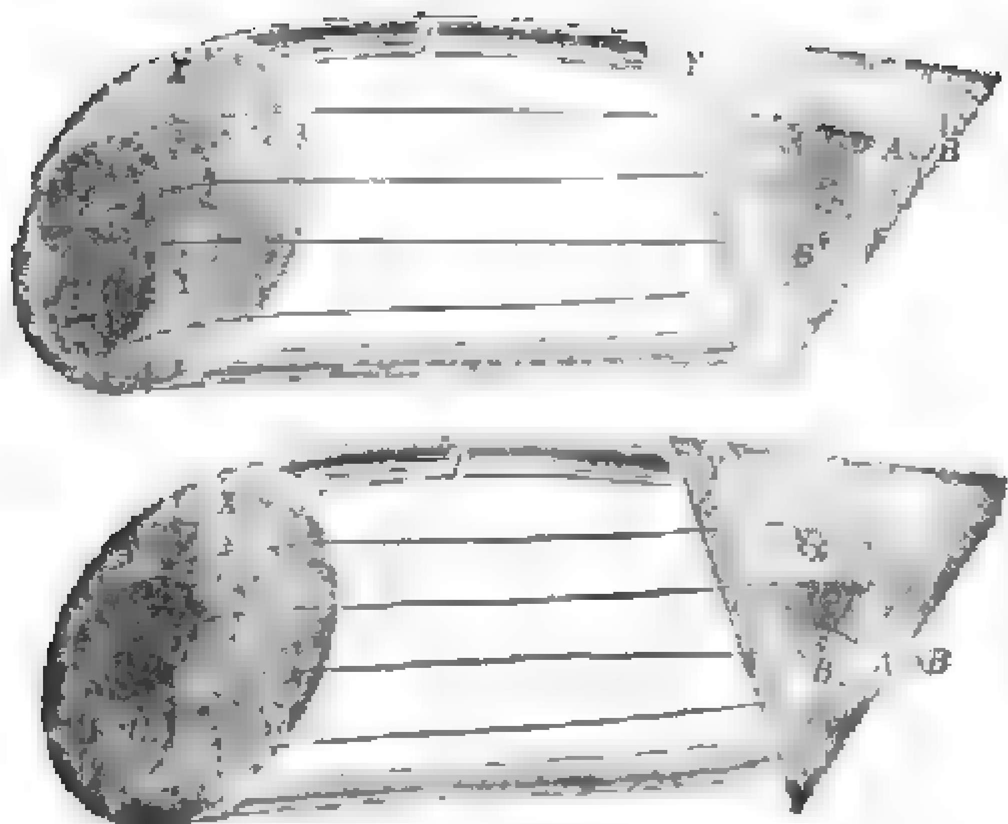


图 3-9

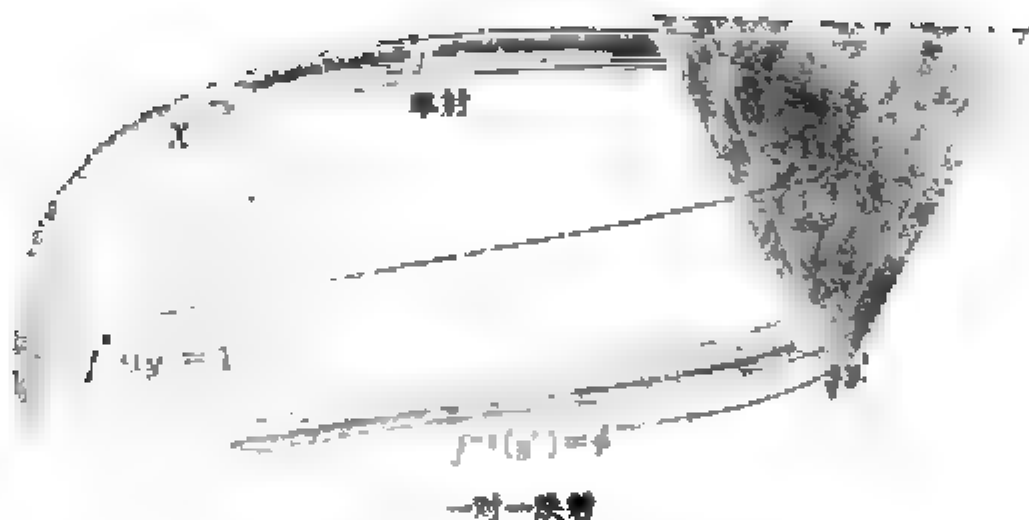
$$(2)^{-1}\quad f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B).$$

这一事实，若用文氏图表示，是容易看清的。

已知映射 $f:X\to Y$，如果 Y 的任意元素 y 的逆象 $f^{-1}(y)$ 是空集或是由一点构成的集合时，就说 f 是**一对一映射**．或用现代说法，叫做**单射**．所谓 f 是单射，若用另一观点来说，就是：若取 X 的两个不同的元素 x_1，x_2，则它们的象 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 是 Y 的不同的元素，也就是，当

$$\forall x_1,\ x_2\in X,\ x_1\neq x_2 \text{ 时}, f(x_1)\neq f(x_2).$$

例如，我们取偶数集 E，使其各元素与自身对应，这种对应规则可以看做从 E 到自然数集 J 的映射 $i:E\to J$．因为这个映射是自身的对应，所以值域的任意点若为奇数，则逆象是空($\varnothing$)的，若为偶数则其逆象是一点(自身)，因而此映射是单射．一般地，对于集合 Y，取它的子集 X，使 X 的任意元素与



一对一映射

Y 的任意点 Y 的逆象是 $\varnothing$ 或一点

图 3-10

其自身对应，若把它看做 Y 的元素，则得出从 X 到 Y 的一个映射. 这样的映射叫做**包含映射**. 包含映射总是单射. 特别是，满射的包含映射 $i:X\to X$ 叫做**恒等映射**.（因为 i 是满射的包含映射，所以，$i(X)=Y=X$，因此 i 是使 X 的元素不动的且与 X 的元素自身对应的映射.）

其次，当映射 $f:X\to Y$ 是单射且为满射时，若用旧的说法，就是当 f 是一对一的且是到上的，则 f 叫做**双射**. 这时，取 Y 的任意元素 y，因为在 X 中存在恰好映成 y 的元素至少有一个而且只有一个，常把它写做 $f^{-1}(y)$. 于是，记号 f^{-1} 可以看做以 Y 为定义域以 X 为值域的一个新映射 $f^{-1}: Y\to X$. 这样确定的映射 f^{-1} 叫做 f 的**逆映射**. 在文氏图中，与 f 完全是相同的，只不过是把箭头的方向反过来.

作为例子，考虑把自然数集 J 映成其自身的包含映射 $i:J\to J$. 于是，它的逆映射还是 i. 这个例子并不是最好的例子. 再如前边研究过的，把自然数集 J 的元素 2 倍起来到偶数集 E 中的映射 $(\times2)$: $J\to E$. 因为这一映射是双射，所以 $(\times2)^{-1}$ 可看做 $(\times2)$ 的逆映射. 它是使 2 对应 1，4 对应 2，

6对应 5，…的对应，所以，有

$$(\times 2)^{-1} = (\div 2): E \to I.$$

现在补充关于映射的几点注意。在这本书中，映射 $f: X \to Y$，准确地说是单值映射，它使 X 的一个元素 x 只对应 Y 的一个元素 $f(x)$。但是，在科学中，不一定都是单值映射，而考虑多值映射 $F: X \to Y$ 有时更为方便。在这种情况下，$F(x)$ 是 Y 的子集。因为 $F(x)$ 是 Y 的子集，所以若取 Y 的子集族 2^Y 代替值域 Y，则 $F(x)$ 就是 2^Y 的一个点。因此，若把映射

$$f: X \to 2^Y$$

看做 $f(x) = F(x) \in 2^Y$，那么（单值映射）$f: X \to 2^Y$ 就由多值映射 $F: X \to Y$ 所确定。若从定义考虑多值映射 F，就和我们考虑单值映射 f 是完全相同的。由于这种理由，也还有其



图 3-11

他原因，所以在这本书中，所有的映射都假定为单值映射.

下面，说几句数学以外的话. 设 X 是少年的集合，Y 是女性的集合，使少年 x 与他的母亲 $f(x)$ 相对应. 于是，显然 $f: X \to Y$ 是数学的映射. 由这一事实可知，一般来说少年的母亲这样的名词，若有所属关系是可以看做映射的. 可是，如果给出一些无法判断的例子，如书的颜色，父亲的工资，秃头，邻居的老年人等，把它们看做映射是难以想象的. 我们要说的是，当提到映射时，首先，它的定义域和值域必须是已知的，也就是它们都是集合；其次，必须指出对应规则是唯一确定的. 特别是，如果我们离开数学来说，映射的概念是使得"什么什么的什么什么"、"若这样则那样"等普通语言的所属关系以及原因结果的因果关系的一些含混概念能够正确表达的一种新语言. 而集合的概念，实际上也是一种新的语言，用它来正确表达日常使用的含糊的汇集的语言. 这样一来，现代数学的一些概念也可以说是正确描述我们生活着的这个世界的一种新语言.

§3 复合映射

考虑如下两个映射:

$$f: X \to Y \text{ 和 } g: Y \to Z.$$

前边映射的值域和后边映射的定义域是一致的. 这样的两个映射，我们说是**可复合的**. 当 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 是可复合的映射时，首先用 f 把 X 的元素 x 映为 Y 的元素 $f(x)$，然后再把 $f(x)$（它是 Y 的元素）由 g 映为 Z 的元素 $g(f(x))$. 这样做的结果，就确定一个规则，使 X 的元素 x 对应 Z 的一个元素 $g(f(x))$，从而产生了一个从 X 到 Z 的映射

$$h: X \to Z,$$

把这个映射 h 叫做映射 f 和 g 的复合映射. 确切地说，当映

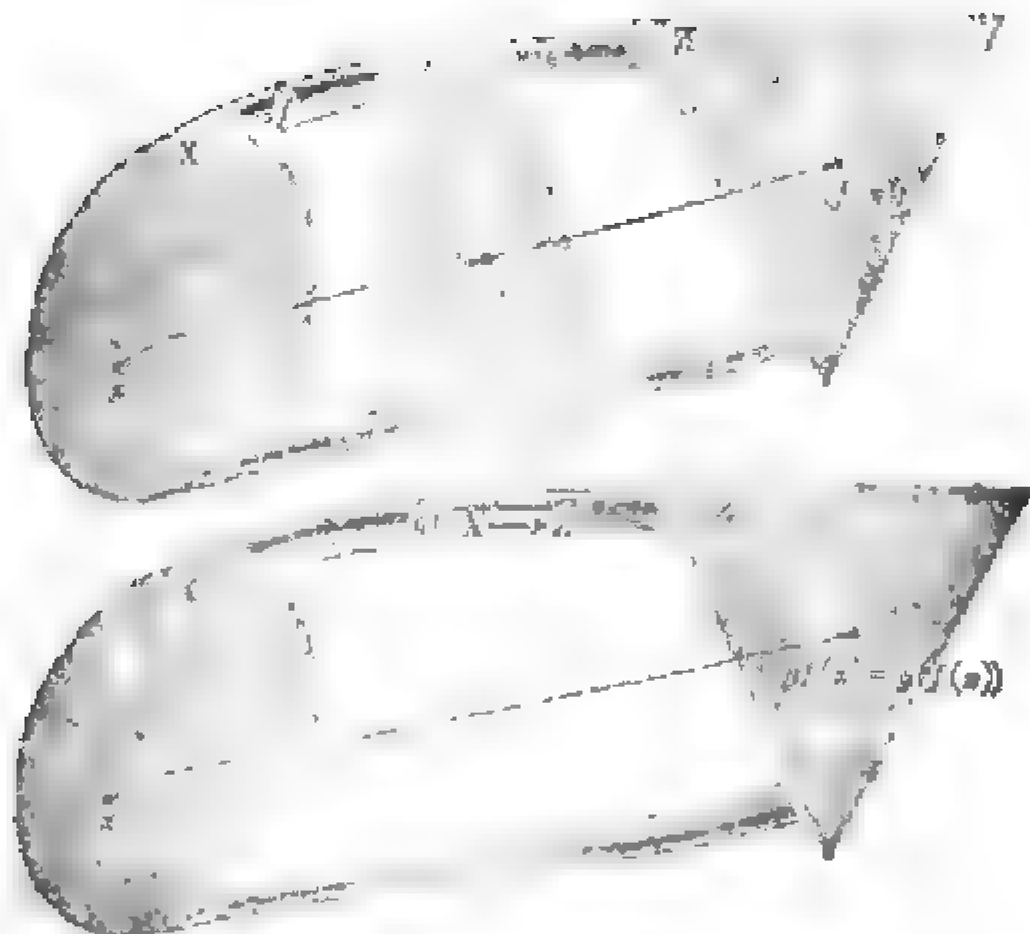


图 3-12

射 $f:X \to Y$ 和 $g:Y \to Z$ 可复合时，对于 X 的任意一个元素 x，由

$$h(x) = g(f(x))$$

确定的映射 $h:X \to Z$ 叫做 f 和 g 的**复合映射**．映射 h 可写做 $h = g \cdot f$，或简写为 $h = gf$。

（在此，由于先作映射 f，后作映射 g，好象应当写做 $h = fg$，但是从定义 h 的式子 $h(x) = g(f(x))$，立即可以看出，写做 $h = gf$ 是很方便的．）

举个简单的例子．设 H_{-1} 表示由一个人作为元素构成的集合．而且，在第二章中，我们研究过的林家的例子 $H = \{A, B, C, D, E\}$ 和 $H_0 = \{$亲，子$\}$，就可取作映射 $f:H \to H_0$。因为 H_0 的元素，不论"亲"和"子"仍然是人，所以 H_0 的元素可被映到以"人"为元素的集合 H_{-1}。设此映射为 $g:H_0 \to H_{-1}$。于

是，在这种情况下，由于 f 的值域和 g 的定义域都与 H_0 相同，所以映射 f 与 g 是可复合的. f 和 g 复合所产生的映射 $h = gf: H \to H_{-1}$，把 H 的任意元素都映成一点"人"的元素，也就是，是个常值映射. 再举一个例子，以前说过的自然数集 J，与它的数二倍相对应的集合为 E，由 J 到 E 的映射写做 $(\times 2)$: $J \to E$，然后再取一个按着"从 E 的每个元素减去 1"的这种运算，使其与奇数对应的映射

$$(-1): E \to O,$$

映射(−1)的值域姑且取作 O，因为偶数 − 1 = 奇数，所以 g 的值域可看做是 1，3，5，…等奇数的集合 $O = \{1, 3, 5, \cdots\}$，即 (-1): $E \to O$. 这样，由于映射(×2)和(−1)是可复合的，而且它们的复合映射为

$$h = (-1)\cdot(\times 2): J \to O。$$

它是使自然数对应于奇数的映射.

§4 限制·扩张

其次，一般地，设已给任意集合 X，Y 和映射 $f: X \to Y$. 并设 X 存在任意子集 A. 于是，A 的任意点 x，它显然是 X 的点，所以由映射 f 把它映为 Y 的点 $f(x)$. 这样一来，若映射 f 只用于子集 A 的点，则从预先已给的映射 $f: X \to Y$ 确定一个把 A 映到 Y 的新映射 $g: A \to Y$. 确切地说，当已给映射 $f: X \to Y$ 和子集 $A \subset X$ 时，则映射 $g: A \to Y$ 对 A 的任意点 x 由

$$g(x) = f(x)$$

决定，这时，映射 $g: A \to Y$ 叫做映射 f 在 A 上的**限制**，也叫**缩小**或 f 的**子映射**，并用记号

$$g = f|A$$

表示.

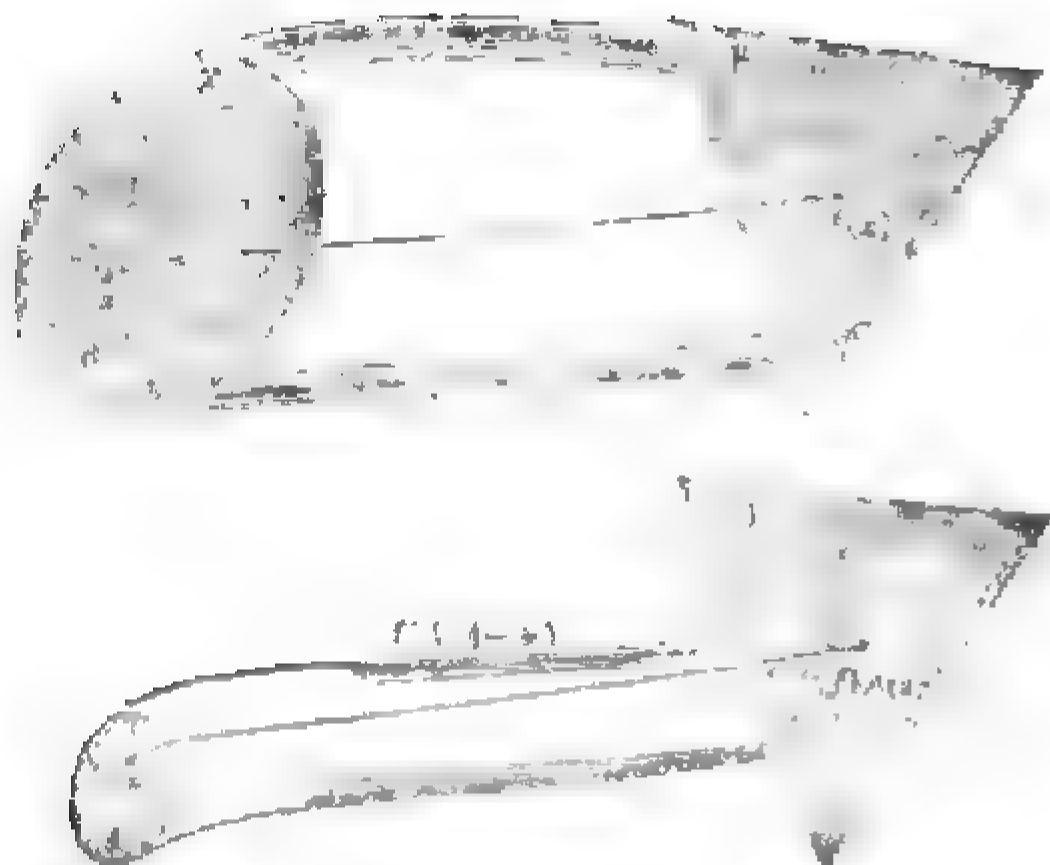


图 3-13

根据定义，因为 $g=f|A$ 即 $g(x)=f(x)$，所以对应规则与 f 是相同的．可是，作为映射，它的定义域和值域是确定的，所以 f 的定义域为 X，值域为 Y．但是，因为 g 的定义域是 A，值域为 Y，所以它们的定义域是不同的，因而 f 和 g 应看做是不同的映射．

现在，把映射的限制这一过程的顺序倒过来． 先给定把 A 映到 Y 的映射 g，设 X 是含有 A 的集合，存在把 X 映到 Y 的映射 f，当映射 f 受 A 的限制，恰好与 g 一致时，f 叫做 g 的**扩张或扩大**．

现在用一个简单的例子来说明．设 f 是把林家的集合 H 映到由“亲”与“子”构成的集合 H_0 的映射，但是作为 H 的子集，如果取“亲”的集合 $H_1=\{A, B\}$，f 在 H_1 上的限制 g：



$f|A=g$ 时，f 是 g 的扩张

图 3-14

$H_1 \to H_0$ 是把 H_1 的元素"亲"映到 H_0 的一点的常值映射。于是，此映射 g 是 f 的限制，反之，f 是 g 的扩张。

又例如，我们考虑把自然数集 J 映到其 2 倍的偶数集 E 的映射

$$(\times 2): J \to E.$$

当取 J 的子集——奇数集 O 时，映射 $(\times 2)$ 在 O 上的限制 $(\times 2)|O: O \to E$ 是把奇数 $2n+1$ 映为偶数 $4n+2=2(n+1)$的映射．反之，设 $(\times 2)|O$ 为 $g: O \to E$，取含 O 的集合为 J，若映射

$$f: J \to E$$

如下确定：J 的元素若为奇数 $2n+1$，则

$$f(2n+1)=2(2n+1),$$

若为偶数 $2n$，则 $f(2n)=4n-1$。因为由 f 的定义 $f|O=g$，

所以此映射 f 是 φ 的扩张。可是，因为 f 由 $f(2n)=4n-1$ 把偶数映为奇数，所以它与上述的映射 $(\times 2)$: $J\to E$ 是不同的。由此例可知，一般地，映射的限制是唯一确定的。但其逆，映射的扩张，一般地存在好些个。

§5 点列

下面，我们来说明应用映射的基本概念。设 J 为自然数集，X 为任取的集合，f 是把 J 映为 X 的任意映射。于是，由 f 把 J 的点 1 映为 X 的元素 $f(1)$，2 映为 $f(2)$，3 映为 $f(3)$，$\cdots$，由这样的映射 f，可使 X 的元素陆续确定。我们把集合 X 的这些点 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$\cdots$记做 x_1，x_2，x_3，$\cdots$。于是，若给定映射 $f: J\to X$，则在集合 X 中有标号为 1，2，3，$\cdots$ 的点的集合，确切地说，确定了 X 的**点列** x_1，x_2，x_3，$\cdots$。反之，若在 X 存在点列，点 x_1 作为 $f(1)$，点 x_2 作为 $f(2)$，$\cdots$，映射 $f: J\to X$ 就确定了。于是，集合 X 的点列，实际上和把它看做映射 $f: J\to X$ 是相同的。

在高等学校中，学过数列(无限的)，研究过向某数逼近的问题，但是这种数列是点列的一种。也就是取实数集 R 作为集合 X，而且把通过映射 $f: J\to R$ 确定的数列简记为 $\{f(n)\}$。例如，当映射 $f: J\to R$ 是 $f(n)=\dfrac{1}{n}$ 时，表示这种映射的数列 $\left\{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\cdots,\ \dfrac{1}{n},\cdots\right\}$ 可写做 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$。

§6 特征函数

下面，我们取某集合 X，暂时把 X 固定进行考虑。在此 X 中任取一子集 A，当从 X 中任取一个元素时，若该元素属于 A，使它对应数 1，若不属于 A，使它对应数 0。根据这种对

应，就确定了从 X 到 0 与 1 构成的集合的映射 χ_A. 此映射

$$\chi_A: X \to \{0, 1\}$$

叫做 X 的子集 A 的(在 X 中的)**特征函数**. 为什么采用特征函数这样的名称，可以反过来说明. 假设已给从 X 到 0 或 1 的任一映射 f, 于是由该映射，使取值为 1 的 X 的元素的集合唯一确定. 也就是由映射 $f: X \to \{0, 1\}$ 决定了 X 的子集

$$A = \{x \mid f(x) = 1\}.$$

如果作 A 的特征函数 χ_A, 这与前边给定的映射 f 是一致的. 也就是，集合 X 的子集 A 由特征函数 χ_A 唯一决定，因此可以认为特征函数就是子集.

最后，还要说一句话. 如果 $\chi_A: X \to \{0, 1\}$ 从理论上是通得过的，就应叫做特征映射. 可是，由于从前 χ_A 已称为特征函数，所以这种称呼还是因循习惯. 因为它对数学来说也是人为的，特别是使用特征函数这种称呼也不会引起混乱和麻烦，所以在此即使放弃特征映射这种叫法，对于继续前进也许还是有益的.

第四章　关　　系

§1　直积

在平面上取正交的 x 轴和 y 轴，我们来考察，如图所示，以一个顶点为原点边长为 1 的正方形。正如所知，这个正方形的点能用实数对 (x, y) 表示出来。在这种情况下，x 是点 (x, y) 在 x 轴上射影的点 $(x, 0)$ 的 x 坐标，y 是点 (x, y) 在 y 轴上射影的点 $(0, y)$ 的 y 坐标。从这一事实可以看出，当在 x 轴和 y 轴上分别取从 0 到 1 的线段 $[0,1]$ 时，从各线段上分别取任意点 x 与 y 所成的对 (x, y) 就是正方形上的点 (x, y)。

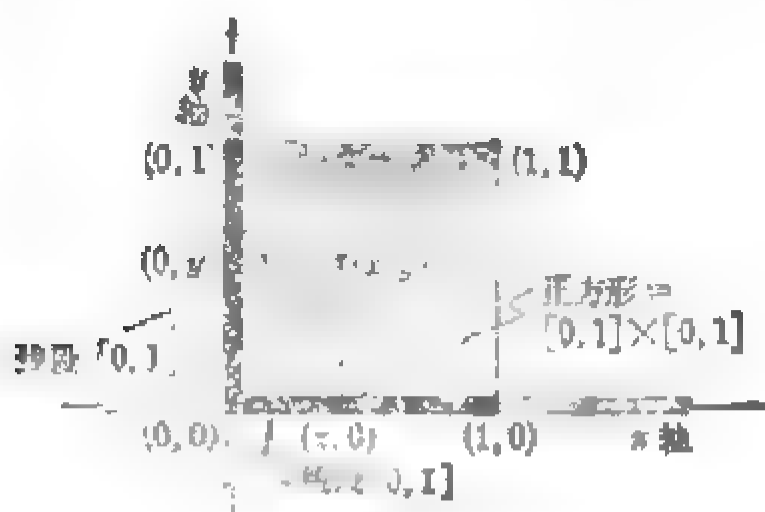


图　4-1

把如此得到的正方形说成是线段 $[0,1]$ 和线段 $[0,1]$ 的直积。在一般情形中，当已给两个集合 X 与 Y 时，所谓直积，是指从 X 中任取一个元素 x，再从 Y 中任取一个元素 y 做成的对 (x, y)。若把对 (x, y) 看做一个新"点"时，所有这种点

作成的集合，我们用记号 $X \times Y$ 表示．当 X 和 Y 是集合时，由任意元素 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 作成的对 (x,y) 总是某种"东西"，而确切地说，$X \times Y$ 就是集合

$$X \times Y = \{(x, y) | \forall x \in X, \forall y \in Y\}.$$

上述例子正是当 $X = Y = [0, 1]$ 时的特别情形，所以 $X \times Y$ 可以解释为正方形的点的集合。

这个问题也可用另外的观点来观察，如图所示，若在 x 轴上区间[0, 1]的所有点上都画出垂直于 x 轴的[0, 1]线段，这些线段的所有点构成正方形．或者，在 x 轴上的线段 [0, 1] 上，垂直于 x 轴长度为 1 的线段从 0 到 1 作平行移动，这样的线段也画出了正方形。

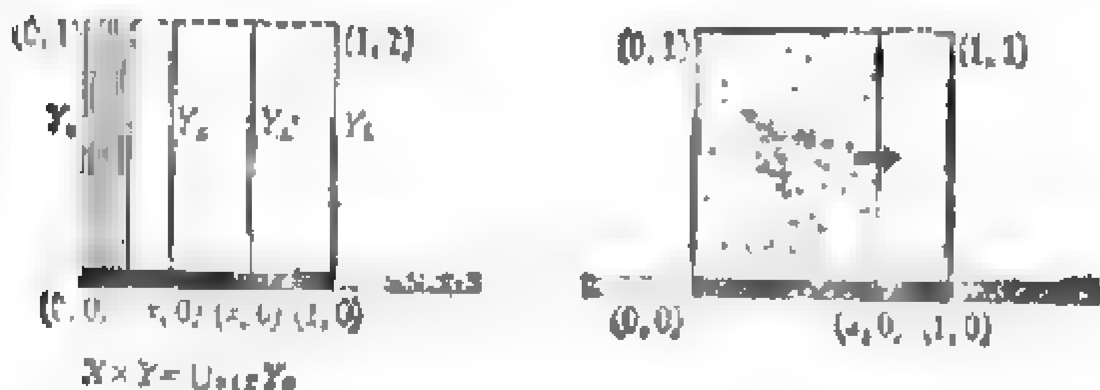


图 4-2

如果把它用式子表示，则有

$$X \times Y = \{(x, y) | \forall x \in X, \forall y \in Y\}$$
$$= \bigcup_x \{(x,y) | \forall y \in Y\}.$$

若设 $\{(x, y) | \forall y \in Y\} = Y_x$，则当 x 一定，Y 的点 y 变化时，Y_x 和 Y 是相同的集合．Y_x 是在 x 轴上立于 [0, 1] 的点 x 上的线段．因为 Y_x 的 x 是[0, 1]的任意点，所以 Y_x 是从 Y_0 到 Y_1 随着 x 的变化而移动的。

其次，作为例子，设 X 是线段 [0, 1]，Y 是半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆

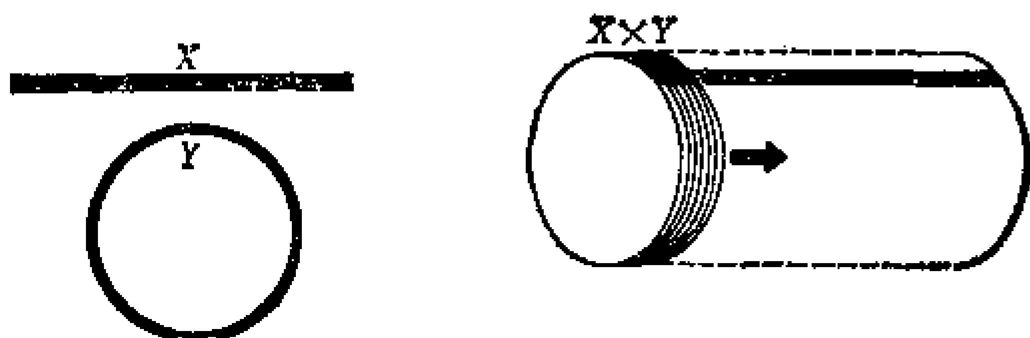


图 4-3

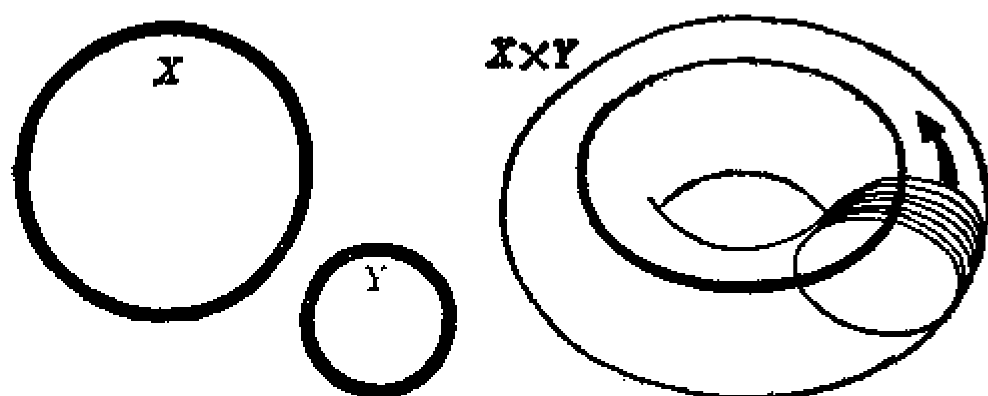


图 4-4

周.如果象上面那样考虑,那么直积 $X\times Y$ 就是在长为 1 的线段各点处做垂直于该线段且完全相同的圆周所构成的图形.或者说，在这个线段上且垂直于线段的圆周平行移动所得到的图形，也就是象下图那样的圆柱面.

若 X 和 Y 都是圆周，则 $X\times Y$ 是环面.

集合的直积，并不是仅就两个集合定义的. 当已给定 n 个集合族 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 时,它们的直积和两个集合时一样,是用

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid\forall x_1\in X_1, \forall x_2\in X_2, \cdots, \forall x_n\in X_n\}$$

定义的. 在这里，把 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 叫做因子集合. 另外，在本书中以后常提到直积，这里不能忘记关于直积的一个约

定，就是无论在什么情况下，如果因子集合中有一个是空集，则直积必为空集。

现在，我们用映射的概念来表示直积的概念，具有 n 个因子集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 的任一元素 x 写做 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，但由于元素 x 是由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成的，所以元素 x 可以看做：当指标为 1 时，对应 X_1 的元素 x_1，指标为 2 时，对应 X_2 的元素 $x_2, \cdots$，指标为 n 时，对应 X_n 的元素 x_n，即 $x(1) = x_1, x(2) = x_2, \cdots, x(n) = x_n$，从这种写法来看，元素 x 实际上可以看做映射

$$x:\{1, 2, \cdots, n\} \to X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n.$$

这里，对应于直到 n 的自然数 i，映射 x 的象 $x(i)$ 是 $x = \{x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n\}$ 的第 i 个元素 x_i. 也就是，$x(i) = x_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 显然 $x_i \in X_i$. 由此，n 个集合 $X_1, \cdots, X_n$ 的直积可以看做 $X_1 \times \cdots \times X_n = \{x: \{1, 2, \cdots, n\} \to X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$，其中 $x(i) \in X_i$，$i = 1, 2, \cdots, n\}$ 用这个映射的想法，可确定如下的一般集族的直积。

我们来考虑一般的无限集族 $\mathfrak{F} = \{X_\mu | \mu \in M\}$. 所谓这个集族的直积，是指从指标集 M 到 $\cup_\mu X_\mu$ 的映射 x 的全体。这里的映射 x，对集合 M 的任意元素 μ 来说满足 $x(\mu) \in X_\mu$. 在这种情况下，直积用记号 $\Pi_{\mu \in M} X_\mu$ 表示。也就是

$$\Pi_{\mu \in M} X_\mu = \{x: M \to \cup_\mu X_\mu | \forall_\mu \in M, x(\mu) \in X_\mu\}.$$

由此可知，这个定义，只不过是根据有限个集合直积映射的定义把它推广到无限个集族的情形。取直积的任意点 x 时，指标 μ 的象，即 X_μ 的元素 $x(\mu)$ 或 x_μ 叫做 x 的 μ 坐标。于是，对于 x，可确定与它的 μ 坐标 $x(\mu)$ 或 x_μ 对应的从 $\Pi_{\mu \in M} X_\mu$ 到 X_μ 的映射 $P_\mu: \Pi_\mu X_\mu \to X_\mu$，把它叫做直积向 μ 坐标的射影。特别是，当因子集合都是同一个集合 X 时，把指标集为 M 的集族的直积写做 X^M，把 n 个相同的集合的直积写做 X^n. 这时，

有

$$X^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | \forall x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

例如，取长度为 1 的线段作为 X，若设 $n = 3$，则 X^3 就是象图 4-5 那样的立方体中的点的集合。

没有照顾到读者可能感到的困难，一口气把直积的问题讲完了，现在让我们慢慢地继续进行讨论。

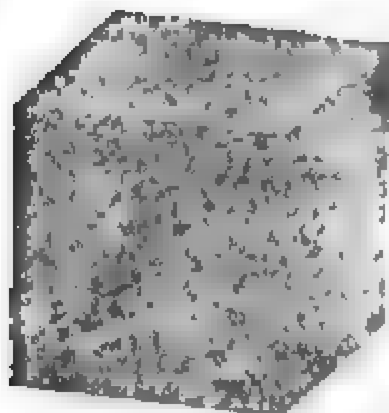


图 4-5



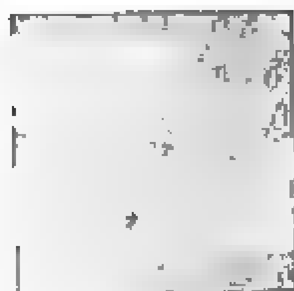


图 4-6

直积或者简单地说关于 X^M，我们着重考虑当 M 是有限个 n 时的 X^n。以线段[0,1]作为 X，并常用 I 表示。由此可知，$I^1 = I$ 是线段 [0, 1]，$I^2 =$ 正方形，$I^3 =$ 立方体，但是 $I^4 = ?$，$I^5 = ?$，$\cdots$，这里可以把它们形式地解释为 I^1 是 1 维立方体，$I^2 = 2$ 维立方体，$I^3 = 3$ 维立方体，一般地，$I^n = n$ 维立方体。然而，我们对这种结论能够真正理解吗？即使很勉强，我们也应当这样去理解。这是因为，以 $I^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | \forall x_i \in I, i \in \{1, \cdots, n\}\}$ 来给出 I^n 和以 $I = \{x | 0 \leqslant x \leqslant 1, x$ 为实数$\}$来确定线段 I 一样，都是数学中正确确定的集合。因为数学是以集合为研究对象的，所以 I^n 这种集合也是数学的对象。就这种意义来说，它完全是数学的实际存在。那么集合 I 和 I^n 到底在什么地方有差别呢。所说的 I 是能够看得见的，当 $n \geqslant 4$ 时，是看不见的。在数学之外，例如空

气等尽管看不见，但它还是真正的物理的实际存在，因而看不见的这种理由是不能成立的。不过，它是何物从(图形的)直观是得不到的，这一困难也是事实。

这在理论上没有什么新颖之处。现在，我们来谈谈高维空间的问题吧。首先，一维空间作为直线，二维空间是平面，三维空间就是我们日常所在的空间。我们在平面上画出一条直线，在它上面一点引该直线的垂线，使它总与前直线保持垂直关系而移动。于是可知，象线段×线段＝正方形那样，有

$$平面=直线\times直线=(直线)^2.$$

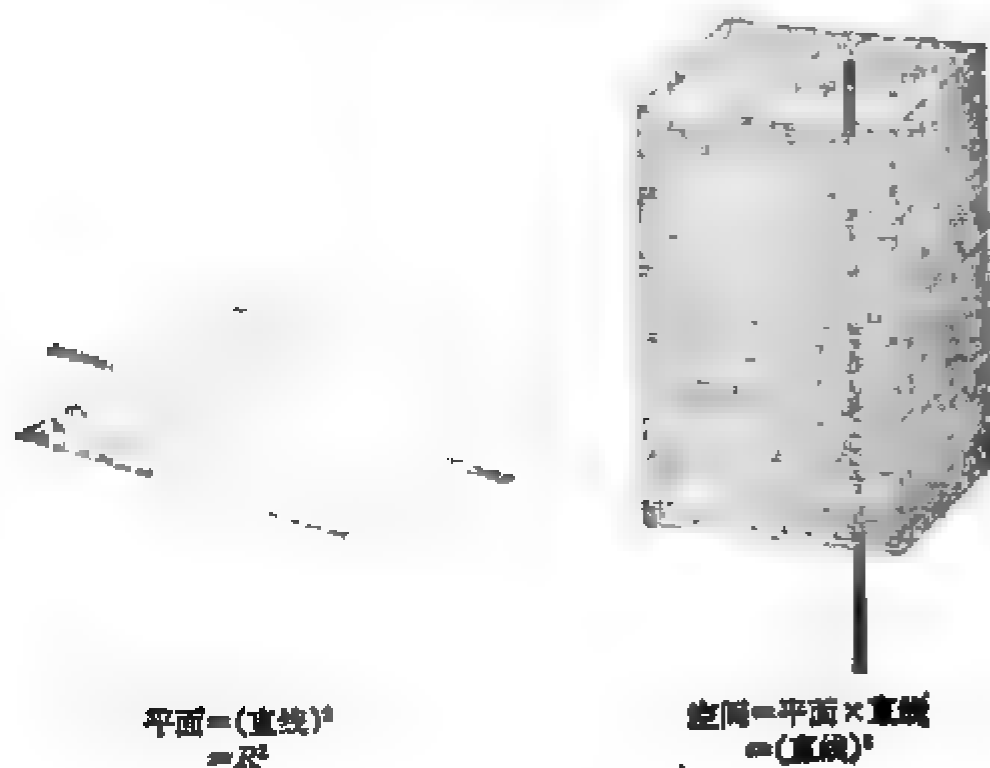


图 4-7

反之，也可以说，先取一条直线，使其沿着和它垂直的另一条直线上滑动也能得到平面。因此，若以平面代替直线，画出与此平面交于一点的直线，使平面沿着该直线移动，就可以成为空间，也就是

$$空间=平面\times直线=(直线)^2\times直线=(直线)^3.$$

若用R这种记号表示直线，那么

$$1\text{ 维空间}=\text{直线}=R,$$

$$2\text{ 维空间}=\text{平面}=R^2,$$

$$3\text{ 维空间}=\text{空间}=R^3.$$

至于4维空间，可先画出与 R^3 交于一点的 R，使 R^3 沿 R 滑动得到的点集合就是 R^4. 同样地可以得到 $R^5, R^6, \cdots$，以至一般地 R^n. 这里的 R^n 是怎样构造的呢，是所谓几何的直观得到的吗？如果我们以1维立方体 I 作为 R，2维立方体 I^2 作为 R^2，3维立方体 I^3 作为 $R^3, \cdots$，那么一般地 n 维立方体 I^n 是什么样的就可推测出来。

听起来似乎觉得神秘，但是当 $n \geqslant 4$ 时的 R^n 和 I^n 不能看做仅是数学家的妄想，它的价值和用场，我们将继续讨论（归根结底，这一点也正是写这本书的原因）.

我们都知道，我们头脑的大脑皮质构造，从生理学来说，是掌管我们思维的器官. 这种皮质构造是由 10^{10} 个（＝100亿个）神经原构成的，它们是用所谓突触组织，对于一个神经原约和 10^3 个其他的神经原连结起来的，这种情况实在是无法形容的一种复杂的构造. 因此，即便使用现在最先进的科学方法，对于我们的思维是什么这个问题仍无法解答. 最近（从1960年以来），拓扑学家 E. C. 季曼提出了新的建议. 建议中关于大脑拓扑学的理论概要，在拙著《拓扑学的世界》（钻石社出版）中做了详尽的叙述，成为其理论要点的就是所谓思维立方体的概念. 大脑皮质构造是 10^{10} 个神经原构成的，各种神经原是由于其他神经原传来的信息而兴奋的. 若神经原处于完全不兴奋状态时用0表示，最兴奋的状态时用1表示，那么各神经原的兴奋状态就能够用线段 $I=[0,1]$ 的点 t（即 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的实数）表示出来. 因此，当我们把 10^{10} 个神经原的状态付上记号 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 时，又设每个神经原的状态为 $t_1, t_2, t_3,$



神经原与轴突的突触图

神经原可以看做电子回路的晶体管原件，轴突则类似于导线把它们连结起来，形成一个回路网，即头脑。由于神经原和轴突连结点的突触部位生物电和化学反应引起刺激，再由轴突向另一神经原传递

图 4-8

t_4，…，那么皮质构造的全体状态如何，就可用 10^{10} 个的实数组

$$(t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{10^{10}})$$

来表示。这里的各 t_i，显然有 $0 \leqslant t_i \leqslant 1$。例如，当所有的 t_i 为 0 时的皮质状态 (0, 0, …, 0) 可以认为是睡眠。这样一来，皮质的状态，也就是我们的思维可以看做和 10^{10} 维立方体相同的集合。因此，季曼提出了把 10^{10} 维立方体 $I^{10^{10}}$ — 思维立方体作为我们头脑的数学模型，用以说明我们的认识、记忆等的心理现象。

当然这种理论还没有完成，但是将来进一步发展的时候对于以前我们还无法弄清楚的人的心理构造问题，就有希望得到解决。另外，几乎在这种想法的同时，法国的拓扑学家 R. 托姆一般地广泛而深入地进行了研究工作，并且把它应用于包含人在内的生物以及无生物的形态形成论中。这种未来

的科学，将把本书中所论述的现代数学产物，令人感到高度抽象的数学的实际存在作为一种有利的工具来进行研究.

§2 关系

在第二章和第三章中，关于集合和映射做了阐述. 把集合和映射集中到一起，称为集合论. 因而集合论就是关于集合和映射的理论. 集合论，特别是有限集合论，在产生人类文化的同时，它不知不觉地已被人们所认识. 而无限集合论，约在一百年前，它的理论才由康托尔所开创，在第二、第三章中已做了大致的叙述. 它们将成为今后科学界中相当有力的语言. 在这章中，我们将讨论关于直积这个重要概念的各种关系.

当笼统地说到普通的"关系"时，例如象人类之间的友情，首先必须考虑对象集合 X 的存在. 于是，当 X 是人的集合时，说 a 先生和 b 先生之间有友情关系，b 先生和 c 先生之间没有友情关系，这里所说的"关系"是集合 X 中的两个元素之间的关系. 在 (a, b) 有友情关系，(b, c) 没有友情关系这种说法中，都是用 X 的两个元素构成的对来表示的. 反之，如果我们考虑有友情关系的两个元素构成的对的全体，并设它为集合 R，那么从数学的关系来说，可以把 R 定义为 X 的直积 X^2 的某一子集. 就前边的例子来说，因为 a 先生与 b 先生有友情关系，所以 $(a, b)\in R$，而 b 先生与 c 先生没有友情关系，所以 $(b, c)\notin R$. 在许多情况下，当考虑某种关系 R，在 a，b 满足这种关系，即 $(a, b)\in R$ 时，常常采用如下写法： aRb.

在研究人类和生物时，一般地，在研究人文科学时，关系这种概念的建立应当是首要的基本任务. 因此，我们首先讨论关系的一般性质.

由集合 X 所确定的关系 R，对于 X 的任一元素 a 恒有

$$aRa \text{ 即 } (a,a)\in R$$

时，我们就说它是**反身的**．其次，若 aRb，则有 bRa 时，则称关系 R 是**对称的**．如果有

$$aRb \text{ 且 } bRc, \text{ 而总有 } aRc$$

时，这种关系称为**可迁的**．若把关系 R 作为人的集合的友情来看待，由于人总是和自己是友好的，若用与自己友好这种意义来解释友情，则对于 X 的任一元素 a，aRa 就表示友情的反身关系．另外，因为友情是互相产生的，所以若 a 对 b 友好，则 b 对 a 也友好．因此，若 aRb，则有 bRa，它表示友情的对称关系．但是，当 a 与 b 有友情，b 与 c 也有友情时，a 与 c 不一定有友情关系，所以不能说友情具有可迁关系．（对于友情来说，若进一步详细考虑，无论反身关系也好，对称关系也好，也许都不存在，这是因为人间友情这种概念具有不确切的暧昧的因素，这不是数学上的问题，而这一点却是人文科学中的一个重要问题．）

在这里，再说上一句闲话．X 上的关系 R 是 X^2 的某一子集，用 $R\subset X^2$ 确定．于是，当 $(a, b)\in R$ 时，由于 a 和 b 具有 R 的关系，所以可使

$$a \text{ 对应 } b,$$

若换一种说法，当

$$(a, b)\in R$$

时，就规定

$$r(a) = b,$$

由关系 R 可确定映射

$$r: X \to X.$$

实际上，

$$Y = \{x \mid (x, y)\in R\},$$

也就是，把 X^2 到 X 的第一坐标的射影设为

$$p_1: X^2 \to X$$

时，若令 $p_1(X^2) = Y$，则 $r: Y \to X$，在一般情况下，它是多值映射(因为也许 a 与 b 和 c 都友好)。由于是多值的，这里导入关系的概念与第三章中将要结尾时要求映射是单值的这一点是个很大的矛盾。因为在那里说过把多值映射变为单值映射是有许多方便的。在这里导入了关系这一新概念，归根到底是因为用单值映射作起来不便。用单值映射不能说明的部分作为关系导入我想还是合适的。因此，虽应撤回前言，但是按着以前的规定，在这本书中，只要提到映射还是照单值映射来理解。

§3 等价关系

在现实世界中，可以考虑无数的关系。在这些关系中，最重要的关系是**等价关系**。它是满足"反身"、"对称"、"可迁"三种性质的关系。而且等价关系常用记号≡或～表示。例如，我们再取人的集合 X，我们考虑同性这种关系 ≡。由于任何人 a 都与自己同性，所以 $a \equiv a$ (反身)。其次，若 $a \equiv b$ 显然 $b \equiv a$ (对称)。若 $a \equiv b$, $b \equiv c$，三人都是同性的，显然 $a \equiv c$ (可迁)。所以，同性关系≡是人的集合 X 的等价关系。那么，若在集合 X 上给定了等价关系 ≡，当 X 的元素 a, b 有 $a \equiv b$ 时，我们就说 a 和 b 是**等价的**。对于集合 X 的任意元素 a，与 a 等价的 X 的元素全体的集合用 $[a]$ 表示。即

$$[a] = \{x | a \sim x\},$$

因为 $a \sim a$，所以 $a \in [a]$，也就是，$[a]$ 决不会是空集。但是，当我们考虑两个这样的集合 $[a]$，$[b]$ 时，它们必是

$$[a] \cap [b] = \varnothing \text{ 或者 } [a] = [b].$$

若 $[a] \cap [b] = \varnothing$，就没什么可讨论的。若 $[a] \cap [b] \neq \varnothing$，则只要证明 $[a] = [b]$ 即可。这个问题也可以这样说，若

$[a]\subset[b]$，则必有 $[a]\supset[b]$. 我们先证明 $[a]\subset[b]$. 因为 $[a]\cap[b]\neq\varnothing$，所以 $[a]\cap[b]$ 至少含有一点 c. 于是，因为 c 含于 $[a]$ 又含于 $[b]$，所以 $a\sim c$，$b\sim c$ 成立. 因为关系 $\sim$ 是对称的，所以有 $c\sim a$. 由 $b\sim c$ 和 $c\sim a$，应用可迁关系，则得 $b\sim a$. 若 x 是$[a]$的任一元素，则有 $a\sim x$，根据可迁关系必有 $b\sim x$，这就意味着 $x\in[b]$. 因为 x 是$[a]$的任意元素，所以 $[a]\subset[b]$ 是显然的. 同样可以证明 $[a]\supset[b]$，所以可知 $[a]=[b]$. 于是，我们的问题得到证明. 由此，若考虑 X 的子集族

$$\{[a]\mid a\in X\},$$

它就成为分离的集族. 而且把每个子集$[a]$叫做**等价类**. 确切地说，叫做含有 a 的**等价类**，也可叫做 a 的**块形**. 这里，重要的是

$$\bigcup_{a\in X}[a]=X,$$

也就是，当集合 X 存在等价关系时，X 就是由这种等价关系分成的块形组成的.

一般地，当 X 存在分离的子集族

$$\mathfrak{P}=\{P_i\},$$

而且有

$$\bigcup_i P_i=X$$

时，把这样的族 $\mathfrak{P}$ 叫做 X 的**分割**. 于是前边的说法也可以说成: **X 可以分割成它的等价关系的等价类族.** 反之，当给定 X 的分割 $\mathfrak{P}=\{P_i\}$ 时，所谓 x,y 有 $\sim$ 关系，是指确定 x,y 是同属于 P 的元素，即 $\sim$ 是等价关系. 由此可知，X 的等价类族正好是 $\mathfrak{P}$.

前边所说的等价关系，现在举一个简单的例子. 设 X 是人的集合，把 $\sim$ 作为人和人之间的一种关系. 当两个人之间，同是男的或同是女的时，就说有了关系 $\sim$. 于是，根据等价关

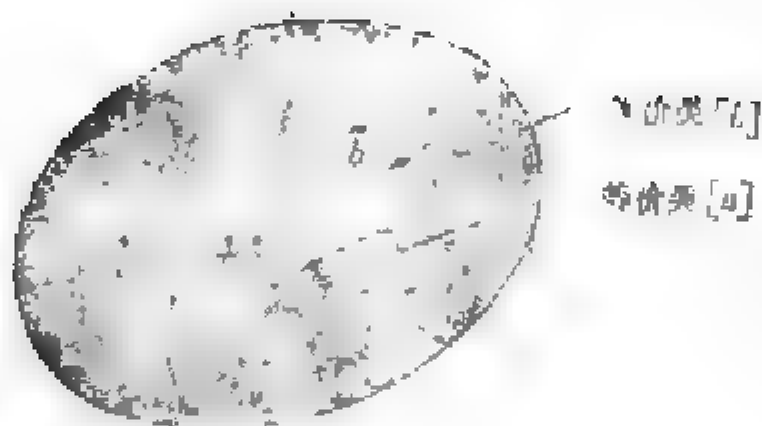


图 4-9

系，人的集合 X 被分为两个块形，即男人全体和女人全体。另外，作为数学的例子，我们考虑所有整数的集合 Z。现在，我们考虑某一正整数 p。在此，我们来定义整数 a 与 b 的等价关系。当 $b-a$ 能用 p 整除时，我们说 a 与 b 是等价的，即 $a\sim b$。这种等价关系是容易理解的。（对于 Z 的任一元素 a，因为 $a-a=0$，$0\div p=0$，所以 p 能整除 $a-a$，即 $a\sim a$。若 $a\sim b$，把 $a-b$ 用 p 除，设它的商为 q，则 $b-a$ 用 p 除的商必为 $-q$，即 $b-a$ 能被 p 整除，所以 $b\sim a$。若 $a\sim b$，$b\sim c$，用 p 除 $a-b$ 和 $b-c$ 商为 q_1 与 q_2。于是 $a-c=(a-b)+(b-c)$ 被 p 除，其商必为 q_1+q_2，因而 $a-c$ 能被 p 整除，所以有 $a\sim c$。）而且，在这时，整数全体被分成 p 个块形，即余数为 0 的整数集、余数为 1 的整数集，…，余数为 $p-1$ 的整数集。（若 p 除 a 余数是 r，p 除 b 余数也是 r 时，则 $a=a_1p+r$，$b=b_1p+r$，而 $a-b=(a_1-b_1)p$，即 p 能整除 $a-b$，也就是 $a\sim b$。其逆也成立。）

其次，我们考虑某集族 $\mathfrak{X}$，它的两个元素集合 X 和 Y 是同构的，即 $X\sim Y$，是指它们之间存在双射

$$f:X\to Y,$$

于是，因为恒等映射

$$i: X \to X \text{ 即 } \iota(x) = x, \ \forall x \in X$$

是双射，所以 $X \sim X$ 成立，即～是反身关系。若 $X \sim Y$ 是由双射 $f: X \to Y$ 给定，其逆映射

$$f^{-1}: Y \to X$$

也是双射，所以 $Y \sim X$ 成立，即～是对称关系。当已知 $X \sim Y$，$Y \sim Z$ 分别是双射

$$f: X \to Y, \qquad g: Y \to Z$$

时，则复合映射

$$gf: X \to Z$$

是由于双射合成的必为双射。由此，有 $X \sim Z$，所以～是可迁关系。于是～是等价关系。根据这样确定的同构关系，集族 $\mathfrak{X}$ 被同构的块形所分割，这种情形下的所谓同构，对有限集合而言，X 和 Y 的元素的个数是相同的。对无限集合而言，它们具有相同的基数。

§4 半序集

以后经常出现的重要关系是所谓“半序”关系。作为例子，我们来考虑某集合的子集族 2^X。当 X 的子集 A，B 有 $A \subset B$ 时，就说 B 包含 A，这种包含关系是半序关系的典型。首先，因为

$$A \subset A,$$

所以半序集是一种反身关系。其次，如果

$$A \subset B, \ B \subset C,$$

则

$$A \subset C,$$

这是一种可迁关系。但是，即使有 $A \subset B$，也未必有 $B \subset A$，所以半序关系不是对称的。若

$$A \subset B \text{ 且 } B \subset A, \text{ 则 } A = B,$$

这时，称这种关系具有**非对称**性质。

一般地，对于关系≤，第一它满足

$$A \leqslant A \text{ (反身律)},$$

第二它满足

$$\text{若 } A \leqslant B \text{ 且 } B \leqslant A, \text{ 则 } A = B \text{ (非对称律)},$$

第三它满足

$$\text{若 } A \leqslant B, B \leqslant C, \text{ 则 } A \leqslant C \text{ (可迁律)}$$

时，把≤叫做**半序**，集合 X 及其半序≤构成的对 $(X, \leqslant)$ 叫做**半序集**．当我们熟悉了的时候，为了简便，可省略 ≤，只把 X 叫做半序集．

例如，我们取整数集 Z．现在把整数之间的大小关系 ≤ 作为关系来考查一下．对于任一整数 x 有 $x \leqslant x$．其次，对于整数 y，若 $x \leqslant y, y \leqslant x$，则 $x = y$．若 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$，所以 Z 和 ≤ 的组合 $(Z, \leqslant)$ 是半序集．在这种情况下，任意取 Z 的两个元素 x, y 时，它们具有如下特殊性质：有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$ 或者二者都成立．若把整数集 Z 换成实数集 R，也有同样情况．再举一个例子，平面上的点可以看做取实数 x 轴和 y 轴的直积 $R \times R$．这个直积的元素 (x, y) 是用两个实数作成的对表示的，而两点 $p_1 = (x_1, y_1)$，$p_2 = (x_2, y_2)$ 之间的关系≤，是由 $x_1 \leqslant x_2$ 且 $y_1 \leqslant y_2$ 来定义 $p_1 \leqslant p_2$．于是，与前边的整数情形一样，关于 ≤，平面是半序集 $(R \times R, \leqslant)$．

现在，我们来讨论有关半序集的基本概念．设已知半序集 $(X, \leqslant)$．并取 X 的任一子集 A．关于 A 的任意元素 x，y，所谓 $x \leqslant y$ 是指在原 X 中有 $x \leqslant y$ 时而确定的．于是，A 的关系≤显然是半序的．半序集 $(A, \leqslant)$ 叫做 $(X, \leqslant)$ 的**子半序集**．例如，前边说的，关于 $(R \times R, \leqslant)$ 取 y 轴上的所有点作为 A，则 $(A, \leqslant)$ 就构成子半序集．半序，实际上是比较含混的通常顺序概念的准确化．因此，我们现在



图 4-10

对最大或最小这种概念作如下说明。

设X是半序集，A是X的某一子集。这时，所谓y是A的**最小元素**，是指y是A的元素，而且对A的所有元素x，均有$y \leqslant x$。同样，所谓点y是A的**最大元素**，是指y是A的元素，而且对A的所有元素x，均有$x \leqslant y$。下面的概念是非常容易混淆的。所谓元素y是A的**极小元素**，是指y是A的元素，且满足$x \leqslant y$的A的元素x除y以外不再存在。其次，所谓y是A的**极大元素**，是指y是A的元素，且满足$x \geqslant y$的A的元素x除y以外不再存在。还有，所谓X的元素y（也可以是A的元素）是A的**上界**，是指对于A的所有元素x，$x \leqslant y$成立。所谓X的元素y是A的**下界**，是指对于A的所有元素x，$x \geqslant y$成立。一般地，把存在上界和下界的子集A叫做**有界的**。所谓X的元素x是A的**上确界**，是指x是A的上界中最小的，也就是对于A的任意上界y，满足$y \geqslant x$的上界x。同样，可以定义A的**下确界**。在这里必须注意的是，最大元素、最小元素、上确界、下确界，不总是存在的。但是，如果存在就是唯一的。作为例子，假定A是由如下四点构成的集合 $A = \{(0, 0), (0, 3), (1, 1), (2, 2)\}$。于是，$A$可以作为$(R \times R, \leqslant)$的

子半序集。这时，A的极大元素是$(0,3)$，$(2,2)$，极小元素是$(0,0)$。虽然A不存在最大元素，但最小元素是$(0,0)$。

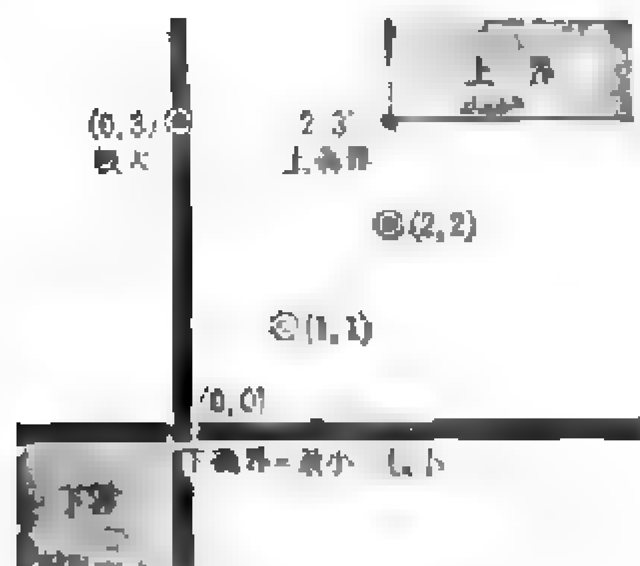


图 4-11

第五章 实数直线

§1 实数直线

现代数学是以牛顿、莱布尼兹创始的微积分也称分析学为主流的. 而且由于微积分的发展，我们能够弄清许多自然的特别是物理学的现象. 分析学主要是处理实数和复数以及研究微分、积分或微分方程的学科.

到现在，我们已经导入了集合和映射的概念，它是不同于数的数学对象. 虽然集合不同于分析学，但至少引进了一些相近的思想. 一般的集合，也能够如同实数、复数那样进行高度的数学处理. 为此要在集合中导入一个叫做拓扑的构造，来考察映射的连续性以及可微性等. 若把运算导入集合，它就成为代数系，但是若把某一构造“拓扑”导入集合，它就几何化，这就是我们现在要讨论的拓扑空间.

因为拓扑空间是为了把数中的连续性扩大到集合中去而引进的概念，所以我们这里首先复习以往在数的领域中，连续性是怎样研究的，由给定的什么样的结构来研究连续性的. 为此，我们首先取实数集合以及几何学中的实数直线. 并且在第六章中，还要讨论实数直线的连续性是怎样几何化的，是怎样把实数直线作为拓扑空间来掌握的.

我们首先提出一个前提. 那就是，实数的集合与直线上点的集合是双射对应，也就是所说的同构集合.

如所周知，在直线上取一点作为原点，再取一个单位长度，使离开原点距离为 1 的点对应数 1，根据这样建立的坐标系，直线上的点能用所有实数表示出来. 反之，任意给定一

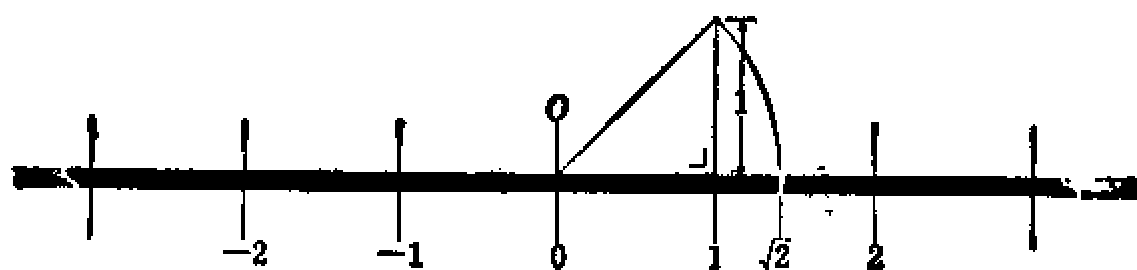


图 5-1

个实数，直线上必有唯一一点与之对应．例如，我们使用圆规如图 5-1 那样来求与$\sqrt{2}$对应的点．根据所说的前提是可以求出的．但是，把直线直观地理解为到处连续而不弯曲的线，它是否果真能如上边说的那样，和实数集合同构呢．实际上，这是还没有用数学证明的性质．在图 5-1 中，我们首先用圆规作出了$\sqrt{2}$的点，但是它可能是我们的错觉．实际上若用超显微镜去观察，圆规所画出的圆周，也许在我们直观的直线上的点之间挤过去．因此，我们的前提是：直线和实数是同构的集合．这实际上就是我们采用能够看得见的直线的原因．因此，根据所说的前提，宁愿以和实数相结合而定义的直线为对象，这样定义也许是合适的．这实际上是一般集合和数相结合所给的定义．

以后，在本章中把和这种实数同构的直线叫做实数直线，并用记号 R 表示．

在高等学校学过的微积分中，最本质的概念是什么呢，那就是数列的收敛概念．因此我们首先来研究收敛的概念．

§2 数列的收敛

我们来研究数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$．若把

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\cdots\right\}$$



图 5-2

在实数直线上用坐标系描绘出来。如图 5-2 所示，当 n 按1，2，3，···顺次增加时，数列的点

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots$$

就逐渐减小而趋近于 0。把这一事实反过来也可以这样说：只要 n 取得充分大就能使得 $\frac{1}{n}$ 任意地趋近于0．而且，这时就说数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 收敛于 0，通常写做

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ 或 } \lim\frac{1}{n}=0.$$

这里麻烦的是等号"="的使用，乍一看的确有可能认为数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 终究是等于 0 的。但是，尽管 n 取得很大如 100 亿，$\frac{1}{n}$ 就是 $\frac{1}{100\text{亿}}=\frac{1}{10000000000}=0.0000000001$，这也决不是 0。那么 $\lim\frac{1}{n}=0$ 表示什么呢。如前边说的那样，当 n 取得充分大时，它表明 $\frac{1}{n}$ 任意靠近于 0 的状态。（显然，若以 $\{a_n\}=\{0, 0, \cdots, 0, \cdots\}$ 作为数列，从开始到各项，a_n 皆为 0．尽管在这种情况下没有什么意义，但上面的解释还是正确的．）

因此，在本书中和现代数学中，常用

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0 \text{ 或 } \frac{1}{n}\to 0$$

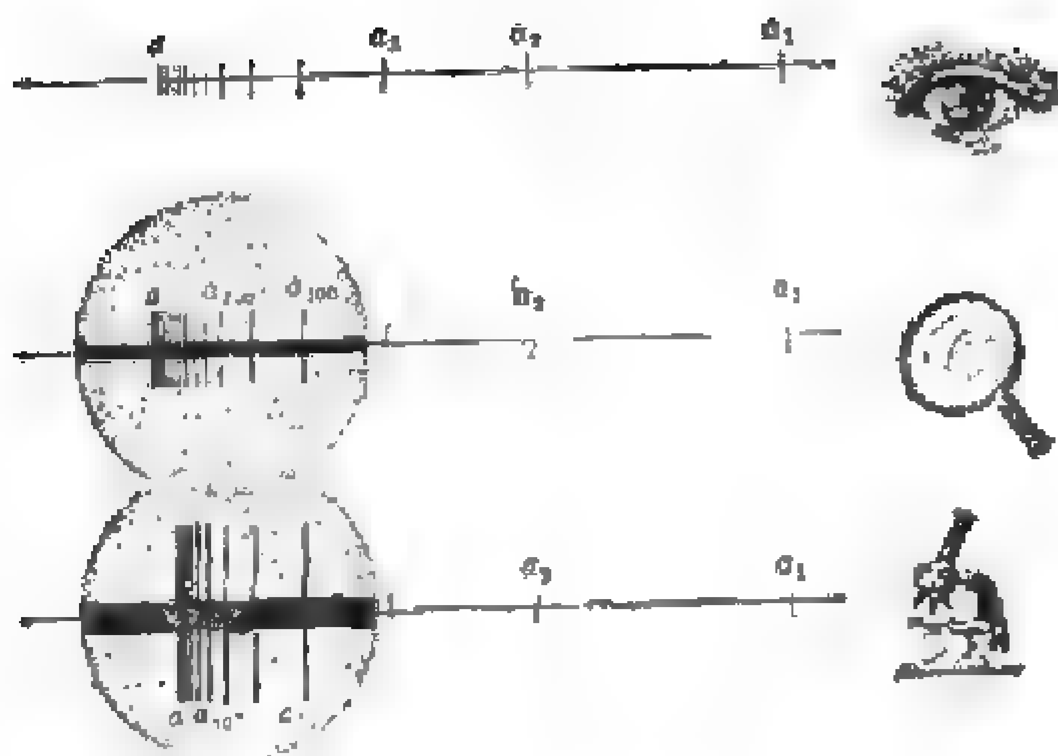


图 5-3

这种简单记号来表示数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$收敛于0。

关于记号就谈这些．现在参照图5-2再次考虑$\frac{1}{n}\to 0$的概念．在前面已经说过，若n取得充分大时，则$\frac{1}{n}$任意靠近于0．在这里，充分大或任意靠近的意义，想已理解，但很难说在数学方面没有什么模糊的了．

不能说已经十分明白，我们不厌其烦地再稍微说几句．“如果n取得充分大，则$\frac{1}{n}$任意靠近于0”把这种对客观状态的描写可以换成如下说法：随便给定不论怎样小的数，我们总能找到使$\frac{1}{n}$比已给的数还小的n”．上述两种说法都表示相同的状态．例如，取0.01作为小数，为使$\frac{1}{n}$比0.01还小，

设 $n > 100$，两边取倒数，则有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100} = 0.01,$$

也就是，如果 n 大于 100，则所有的 $\frac{1}{n}$ 比给定的 0.01 还靠近 0 点。若这种回答还没有说服力，那么再取小数为 0.0000000001，相应地取 $n > 10000000000$，也就是取 n 大于 100 亿，则 $\frac{1}{n}$ 比已给的数 0.0000000001 更靠近于 0点。显然，n 取得越大，$\frac{1}{n}$ 就越趋近于 0。根据这种说法，

$$\frac{1}{n} \to 0$$

表示如下状态：不论给定怎样小的 ε，总能找到 n_0，当 $n > n_0$ 时，0 和 $\frac{1}{n}$ 的距离 $\left|0 - \frac{1}{n}\right|$ 小于 ε。

现在不讲 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，而讨论一般的数列 $\{a_n\}$。数列 $\{a_n\}$ 收敛于实数 a，即

$$\{a_n\} \to a \text{ 或 } a_n \to a$$

是指对于不论怎样小的数 $\varepsilon > 0$，必存在 n_0，对于所有的 $n > n_0$，使得

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

成立。

啰嗦的话到此结束。上述说法多半是不怎么熟悉的外国语味道，除此之外，它把前边说的含混的表现用数学巧妙地表示出来了。牛顿等人创始微积分是在十七世纪的中叶，开始时，收敛的概念显然是含混的。之所以达到现在这种正确的表现形式，是因为有了维尔斯特拉斯时期的工作，这中间

大约经过了一百年。但是，如果真正明白了，那么哥伦布（Colombo）卵也就不是什么问题了．由于用很长的语言叙述，不便于理解，所以我们常常使用记号．首先用英语可以写做

For any $\varepsilon > 0$ there exists an n_0 such that $|a - a_n| < \varepsilon$ for all $n > n_0$.

因为任意就是所有的意思，所以如果用以前说过的记号，可以写做

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0,\ |a - a_n| < \varepsilon.$$

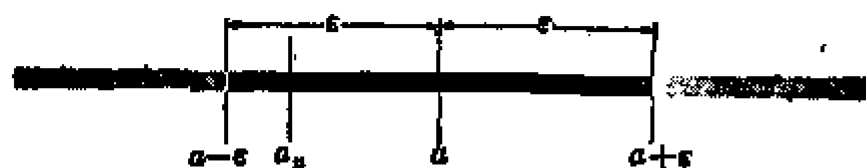


图 5-4

下面，我们来考察 $a_n \to a$ 的几何表示．若按上面的定义，则 $a_n \to a$ 可用图表示(图 5-4)，$|a - a_n| < \varepsilon$ 是指点 a_n 位于在 a 的两侧距离为 $\varepsilon > 0$ 的两点 $a - \varepsilon$ 和 $a + \varepsilon$ 之间的任何位置．在这里，$|a - a_n| < \varepsilon$ 而不是 $|a - a_n| \leq \varepsilon$，这是因为 a_n 不能成为两点 $a - \varepsilon$ 和 $a + \varepsilon$．设有端点为 x，y($x < y$)的某一线段，以 x，y 为端点但不含两个端点 x，y 的线段叫做**开区间**，并用 (x, y) 表示．即

$$(x, y) = \{z | x < z < y\}.$$

于是，$a_n \to a$ 就是：对于已给的 $\varepsilon > 0$，存在 n_0，若 $n > n_0$，则所有的 a_n 包含在以 $a - \varepsilon$ 和 $a + \varepsilon$ 为端点的开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 中，即

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

成立．

若仔细观察图形，当 $a_n \to a$ 时，如果 n 充分大，则 a_n 就任意地接近于 a．在 a 的两侧距 a 为 ε 的点设为 $a - \varepsilon$，$a+$

ε，以这两点为端点的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 若以一个不规则的区间代替，例如 $\left(a-\frac{2}{3}\varepsilon, a+\frac{4}{5}\varepsilon\right)$，也能确定 n（实际上 n 也许惊人的大），只不过有些变化而已，在这个问题的本质上没有多大差别．另外，把区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 代之以使 $b<a<c(a\in(b,c))$ 成立的开区间 (b,c) 也是可以的．由此，

$$a_n\to a$$

是指对于含有 a 的任意开区间 (b,c)，总存在 n_0，若 $n>n_0$，则有

$$a_n\in(b,c).$$

也就是，数列的收敛在本质上可以用开区间这种几何概念来表示．

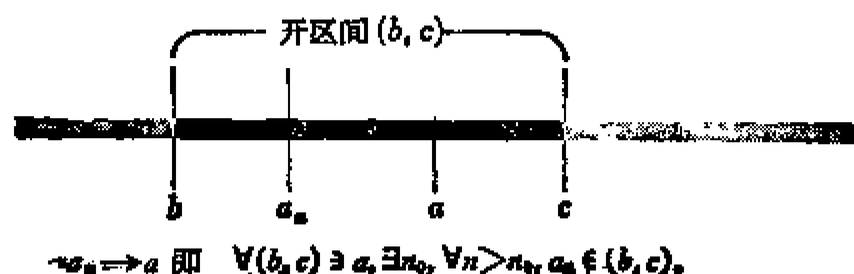


图 5-5

§3 开集

现在，我们进一步给出如下定义．

实数直线 R 的子集 U 是开集，是指对于 U 的各点 x 存在适当的开区间 (a,b)，使

$$x\in(a,b)\subset U$$

成立．当 U 是含有 x 的开区间时，U 叫做 x 的**开邻域**．

为了说明开集，我们规定如下术语．对于 R 的两点 $a<$

b，以 a，b 为端点的点 x 的集合 $a \leqq x \leqq b$ 叫做**闭区间**，并用 $[a, b]$ 表示。也就是

$$[a, b] = \{x | a \leqq x \leqq b\}$$

是含有 a，b 的线段。

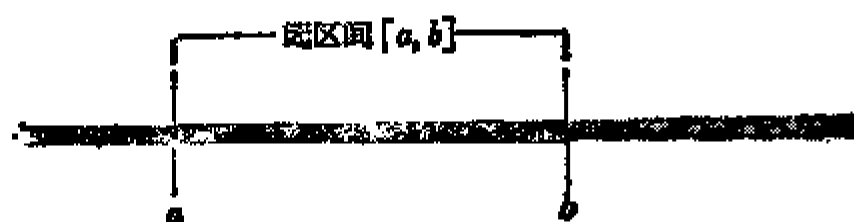


图 5-6

闭区间 $[a, b]$ 是开区间 (a, b) 加上端点 a，b 的集合。同样地，对于区间 (a, b) 加上一个端点 a 或 b，可以定义区间

$$[a, b) = \{x | a \leqq x < b\}$$

和

$$(a, b] = \{x | a < x \leqq b\}.$$

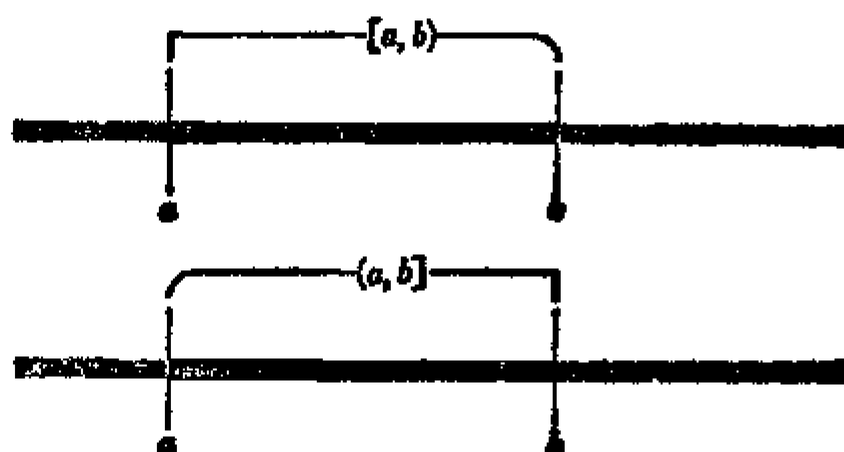


图 5-7

另外，可以定义：以 a 为端点的区间

$$(a, \infty) = \{x | a < x\}$$

和

$$(-\infty, a) = \{x | a > x\}$$

为**开射线**。

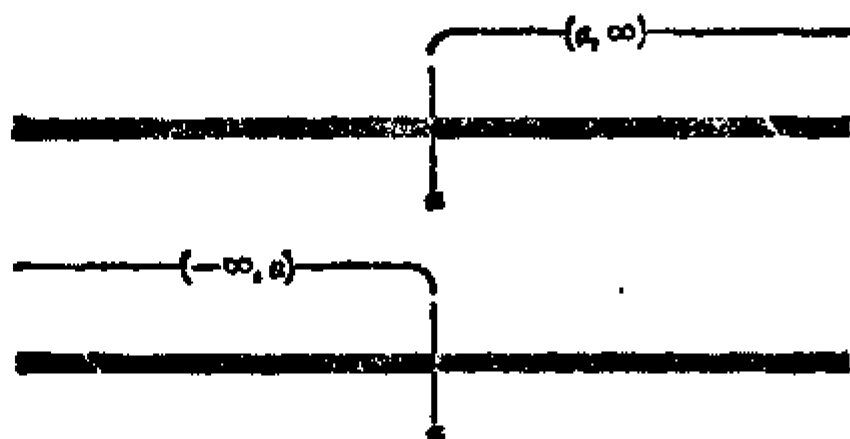


图 5-8

同样，可以定义以 a 为端点的区间

$$[a,\ \infty)=\{x \mid a\leqq x\}$$

和

$$(-\infty,\ a]=\{x \mid a\geqq x\}$$

为闭射线.

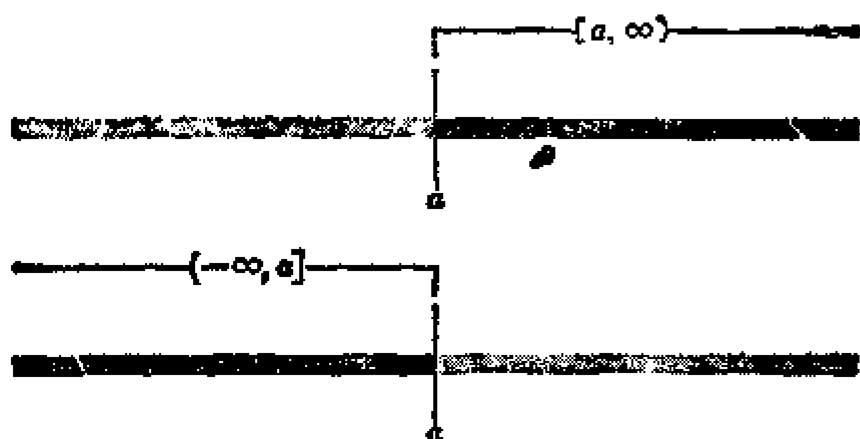


图 5-9

在这里，可能提出∞是个什么记号. ∞显然不是实数，而是射线区间的一个端点向着一个方向无限增大或无限减小，可以把它看做没有尽头的意思.

现在我们来研究，区间、射线等哪一个是开集. 首先考虑开区间 $(a,\ b)$，如果设 x 为它的任意一点，则有

$$x\in(a,\ b)\subset(a,\ b),$$

所以含有 (a, b) 的开区间是存在的，即 (a, b) 本身，因此 (a, b) 是开集.

其次，考虑闭区间 $[a, b]$. 如果点 x 既不是 a 也不是 b，则显然有

$$x \in (a, b) \subset [a, b],$$

当取 a 或 b 作为 x 时，例如就 a 来看，因为 a 是 $[a,b]$ 的最小值，所以如果 $a \in (x, y)$，必有 $x < a$，这样点 x 就不属于 $[a, b]$，所以 $a \in (x, y) \subset [a, b]$ 的开区间 (a, b) 根本不会存在. 因此 $[a, b]$ 不是开集. 就是说，有最小点与最大点的集合不能是开集. 同样可以弄清下面的事实是正确的：(a, b)，(a, ∞)，$(-\infty, a)$ 是开集；$[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$，$[a, \infty)$，$(-\infty, a]$ 不是开集.

到此，关于实数直线的开集问题还完全没有说明.

现在我们来考虑实数直线 R 本身. 当任取 R 的点 x 时，因为存在含有 x 的开区间，例如$(x-1, x+1)$，所以 R 本身是开集. 由此可知，对于 R 的任意点 x，含有点 x 的开集 U（是 R 本身也好，开区间 $(x-1, x+1)$ 也行）总存在.

下面，我们来考虑空集 $\varnothing$ 是怎样的呢？因为对于所谓…命题的不论哪一点都不在 $\varnothing$ 中，所以该命题的任何主张对 $\varnothing$ 都可以说是正确的，因此 $\varnothing$ 也是开集.（我想这多半是牵强附会的. 因为归根结底是空的，所以不论怎么说都没有多大影响.）



图 5-10

设U和V是R的开集．于是并集$U\cup V$还是开集．这是因为，取$U\cup V$的任意点x，即$x\in U\cup V$．于是或$x\in U$或$x\in V$或者它们都成立．若$x\in U$，因为U是开集，所以$x\in(a, b)\subset U$的开区间(a, b)存在．因为有

$$x\in(a, b)\subset U\subset U\cup V,$$

所以开区间(a, b)被$U\cup V$所包含．当$x\in V$时，也同样可以找到包含于$U\cup V$的含有x的开区间．由此，$U\cup V$是开集．这种想法并不是仅适用于两个开集的情况．R的任意开集族$\mathfrak{U}=\{U_\mu | \mu\in M\}$的并集$\cup_\mu U_\mu$是$R$的开集．

同样地，可以指出，若U和V是开集，则交集$U\cap V$还是开集．

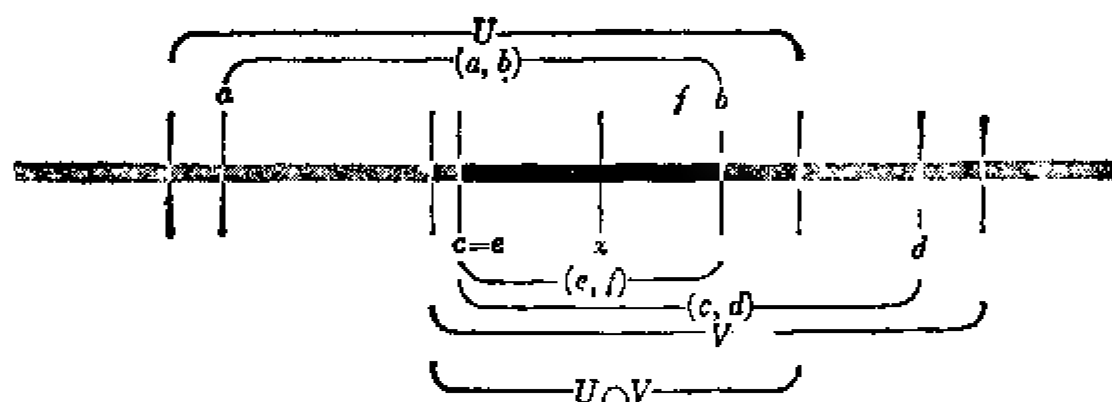


图 5.11

设x是$U\cap V$的任意一点．因为$x\in U$，所以存在$x\in(a, b)\subset U$的开区间(a, b)，又因为$x\in V$，所以存在$x\in(c, d)\subset V$的开区间(c, d)．设a，c中大的为e；b，d中小的为f，由于能够确定使

$$x\in(e, f)=(a, b)\cap(c, d)\subset U\cap V$$

成立的区间(e, f)，所以$U\cap V$是开集．和前边同样，有限个开集族U_1，$\cdots$，U_n的交集$U_1\cap\cdots\cap U_n$还是开集．但是对于无限个开集族，这一结论是不能成立的．

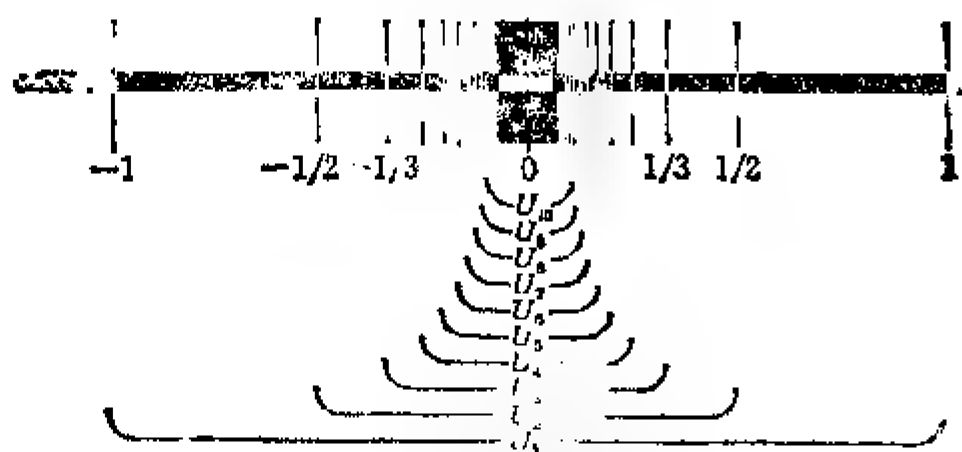


图 5-12

例如，对各自然数 n，取开区间 $U_n=\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$ 和集族

$$\left\{\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)\middle| n\in J\right\}.$$

于是，从图 5-12 可知，$\bigcap U_n=\{0\}$. 可是在集合$\{0\}$中，由于含有一点 0 的集合不能看做开区间，所以$\{0\}$，也就是一点 0 不是开集. 同样地，R 的任何一点也不是开集. 大家可以类似地考虑，当 U 是开集时，从中去掉有限个点的集合还是开集，这一事实是很容易搞清楚的.

根据已有的准备，现在考虑，应用开集来讨论数列的收敛.

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，即 $a_n\to a$，是指对于 a 的任意开邻域 U，必存在自然数 n_0，若 $n>n_0$，则 $a_n\in U$.

现在我们来证明这个问题，这样又出现了教室里的那种干燥无味的气氛. 但是大家不必那么担忧. 首先，若把开集代之以开区间，那么就可知道这种问题是正确的. 因此作为证明，首先用前边的命题导出上面的命题即可. 若设 U 是 a 的任意开集，则存在使 $a\in(b,\ c)\subset U$ 的开区间 $(b,\ c)$. 因为 $a_n\to a$，所以由前边的命题，必存在自然数 n_0，当 $n>n_0$ 时，

$a_n \in (b, c)$. 因为$(b, c) \subset U$,所以显然有$a_n \in U$,于是上面的命题得到证明. 其次,反之设上面的命题是正确的. 于是,因为含有a的任意开区间显然是a的开邻域, 所以必存在自然数n_0, 当$n > n_0$时, $a_n \in U = (b, c)$. 就是说前边的命题得到证明. 到此证明完了.

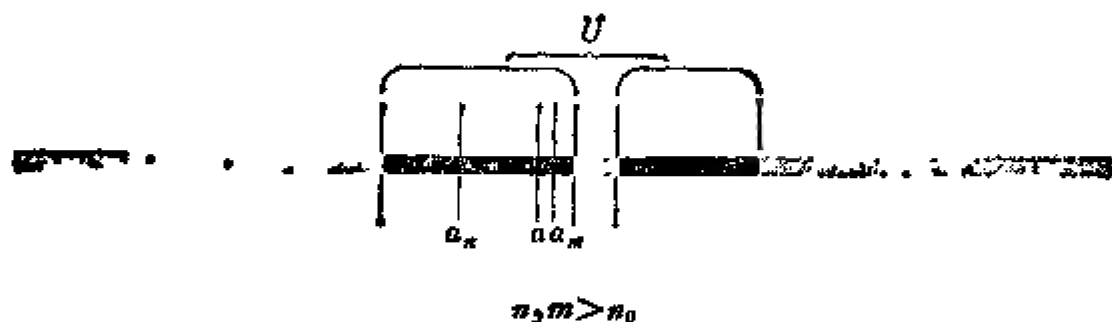
这里, 想用正式的数学格调并结合图形来确切地阐明收敛问题.

定理 1 实数直线R的点列$\{a_n\}$收敛于点a, 即$a_n \to a$, 充分必要条件是, 对于a的任意开邻域U, 必存在自然数n_0, 使得若$n > n_0$, 则$a_n \in U$.

若用记号表示,如:

$a_n \to a \Longleftrightarrow \forall$开集$U \ni a$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0$, $a_n \in U$.

如果用图形表示,就是:



$n, m > n_0$

图 5-13

顺便, 在这里再把我们讨论过的关于开集的结果概括如下:

定理 2 关于实数直线R,

R是开集,

$\varnothing$是空集,

对于R的任意点x, 存在含有x的开集U,

任意开集族$\{U_\mu | \mu \in M\}$的并集$\cup_\mu U_\mu$是开集,

任意有限个开集族$U_1, \cdots, U_n$的交集是开集.

§4 聚点·闭集

下面，我们来讨论闭集。和开集一样，对它的探讨是拓扑学中必须完成的一项根本任务。前边讨论过的闭区间就是闭集的例子。由

$$[a, b] = (a, b) \cup \{a\} \cup \{b\}$$

可知，闭区间就是在开区间(a, b)上加上两个端点a和b。这两个端点和开区间有什么关系呢。为说明这个问题，我们首先需要介绍聚点的概念。我想诸位读者多半是熟悉的，不必象以往那样着急，暂且简单地介绍一下。

所谓点x是集合H的聚点，是指存在由H的相异点所构成的收敛于x的数列$\{x_n\}$。

例　H是开区间(0,1)和3表示的点的并集，即$H = (0, 1) \cup \{3\}$。这时，$\frac{1}{n}(n > 1) \to 0$，$\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\ (n > 2) \to \frac{1}{2}$，$1 - \frac{1}{n}(n > 1) \to 1$。因此，点0，$\frac{1}{2}$，1等是$H$的聚点。容易看出数列$\left\{1 - \frac{1}{n}, n > 1\right\}$是$H$的点而且所有点还是相互不同的。在这里，0，1不是$H$的元素，而$\frac{1}{2}$是$H$的元素。点3虽然是$H$的元素，但不是$H$的聚点（虽然$\{3, 3, \cdots, 3, \cdots\}$可以看做收敛于点3的$H$的数列，但应该注意，这个数列不是$H$



图　5-14

的相异点构成的).

从这个例子可知,集合H的聚点有时是H的元素,有时不是H的元素.

我们已知,聚点是用收敛数列定义的,但收敛可用开集来表示,所以可用开集的概念来表示聚点的概念. 如:

定理 3 点x是集合H的聚点的充分必要条件是,x的任何开邻域都含有和x不同的H的点y.

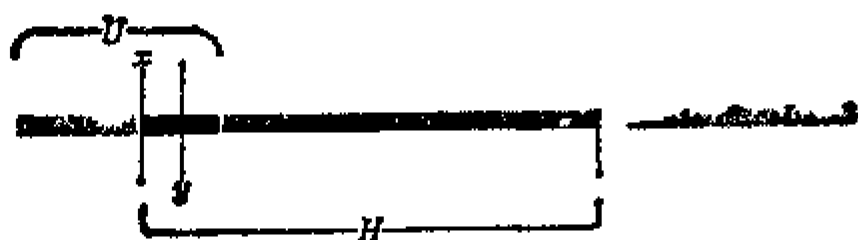


图 5-15

证明 若x是H的聚点,则必存在由H的不同点构成的收敛于x的数列$\{x_n\}$. 若设U为x的任意开邻域,根据定理1,必有自然数n_0,如果$n > n_0$,则$x_n \in U$. 也就是x_{n_0+1},$x_{n_0+2} \in U$. 因为这两点是不相同的,其中之一必定不是x,那么把它作为y即可,反之,假设x的任何开邻域都含有不同于x而属于H的点y. 对各自然数n,用$\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$表示含有$x$的开区间$U_n$,也就是把$x$的开邻域族$\{U_n\}$看做$x$的开邻域. 根据假设,在$U_1 \cap H$中存在和$x$不同的点,设它为$x_1$. 若令$V_2 = U_2 - \{x_1\}$,则容易知道$V_2$是$x$的开邻域. 因此,根据假设,在$V_2 \cap H$中能取到和$x$不同的点$x_2$. 点$x_2$是$H$的点,它即不同于$x$也不同于$x_1$. 一般地,如上作法可以得到相异点$x_1, x_2, \cdots, x_k$,假定这些点构成的有限集合为$F_k$,并设$V_{k+1} = U_{k+1} - F_k$,则$V_{k+1}$是$x$的开邻域. 根据假设,在$V_{k+1} \cap H$中可取到不同于$x$的点$x_{k+1}$,这点$x_{k+1}$是$H$的点,

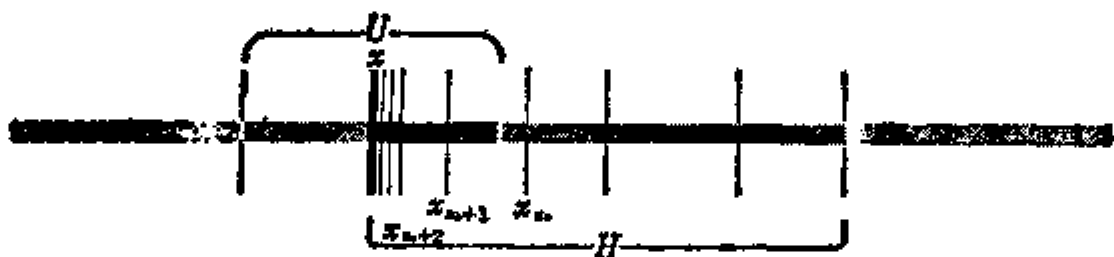


图 5-16

而不同于 $x_1, \cdots, x_k$. 这样一来就确定了由H的所有相异点构成的点列 $\{x_n\}$. 因为这个点列 $\{x_n\}$ 显然收敛于 x，所以 x 是H的聚点.

所谓H是**闭集**，是指H的所有聚点仍含于H. 这就是闭集的定义.

例如，闭区间 $[a, b]$ 就是开区间 (a, b) 加上它的两个聚点 a 和 b，由于 $[a, b]$ 再无别的聚点，所以闭区间就是闭集.

R的有限个点的集合 F，它反正不存在由F的相异点构成的点列，所以F的聚点集合是$\varnothing$. 因为$\varnothing \subset F$，所以F是闭集.

另外，前边说过的集合 $H=(0,1)\cup\{3\}$，虽然 0，1 是H的聚点，但不是H的元素，所以H不是闭集. 又因，所有含有 3 的小开区间都不含于H，所以H也不是开集.

若用开集表示闭集，有下列定理：

定理 4 H是闭集的充分必要条件，就是H在R里的补集$R-H$是开集.

明证 设H是闭集，x是$R-H$的任意一点. 由于H是闭集，所以x不是H的聚点，就是说，使 $U_x \cap H=\varnothing$ 的 x 的开邻域 U_x 至少存在一个. 由此，$R-H=\bigcup_{x\in R-H}U_x$，也就是$R-H$是开集族 $\{U_x\}$ 的并集，根据定理 2，$R-H$是开集. 反之，若$R-H$是开集，则根据开集的定理，对于$R-H$的任意点x，存在使 $x\in U_x \subset R-H$ 的开区间 U_x. 根据收敛

定理1（实际上是它的对偶命题），由H的点构成的所有点列不收敛于x，也就是在$R-H$上不存在H的聚点．由此，H的所有聚点都含于H，所以H是闭集．证明完了．

已知空集$\varnothing$和R本身是开集．由$R=R-\varnothing$以及$\varnothing=R-R$可知，$\varnothing$和R也是闭集．

§5 连续函数

在高等学校学过从实数直线R到R的函数，例如$f(x)=3x$，$f(x)=x^2-5x-5$等．我们现在用拓扑学的概念来讨论这种函数的连续性质．

设M是R的子集，考虑从M到R的函数：$f: M\to R$．设x是M的点，所谓f在M的点x**连续**，是指由M的点构成的收敛于x的数列$\{x_n\}$，它在函数f下映得的数列$\{f(x)\}$收敛于$f(x)$．所谓函数f在M连续，是指f在M的各个点连续．当不必要特意表示M时，就简单地说f是连续的．

例如，$f: R\to R$，对于R的所有点x，是以$f(x)=3x$确定的函数．若取点2以及收敛于2的数列$\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$，于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=6+\frac{3}{n}$$

而得

$$\left\{6+\frac{3}{n}\right\}\to 6,$$

但$6=f(2)$，所以

$$\left\{f\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}\to f(2).$$

因为对于收敛于2的所有数列都有同样结果，所以$f(x)=3x$在点2是连续的．又，f在R的所有点连续，因此函数

$$f(x)=3x$$

是连续函数。同样地，可知 $f(x)=x^2-5x-5$ 是连续函数，这是因为可把它分成象前例那样的数个连续函数。为要更好地理解连续，反过来研究不连续函数也许更有效些。

例如，$g: R\to R$ 是由如下式子和图形确定的：

$$\text{当 } x\geqq 0 \text{ 时，} g(x)=x,$$
$$\text{当 } x<0 \text{ 时，} g(x)=x-1.$$

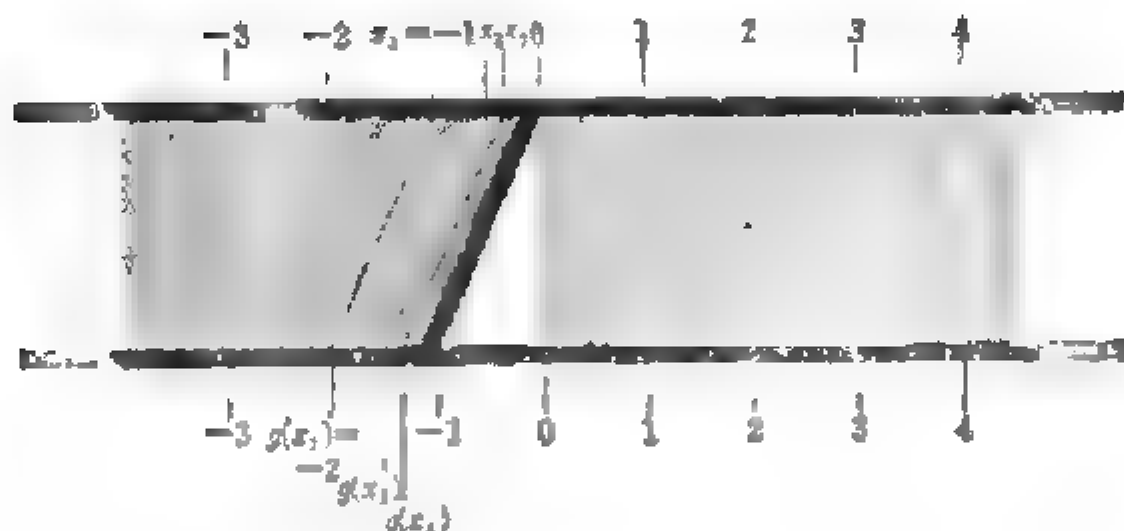


图 5-17

因为，对于 R 的任意点 x，由 g 确定与 x 对应的点 $g(x)$，所以 g 确实是函数。

现在来考察在函数 g 下的映射。对于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，因为 $\frac{1}{n}>0$，所以 $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$。由于 $\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0$，所以有

$$\left\{g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\right\}\to 0=g(0).$$

但是，对于数列 $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$，因 $-\frac{1}{n}<0$，所以 $g\left(-\frac{1}{n}\right)=\left(-\frac{1}{n}\right)-1$。可是 $\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)-1\right\}\to -1$，因而 $-1\neq g(0)=0$。由此，函数在 0 点不连续。这种连续还是不连续，只要把函数

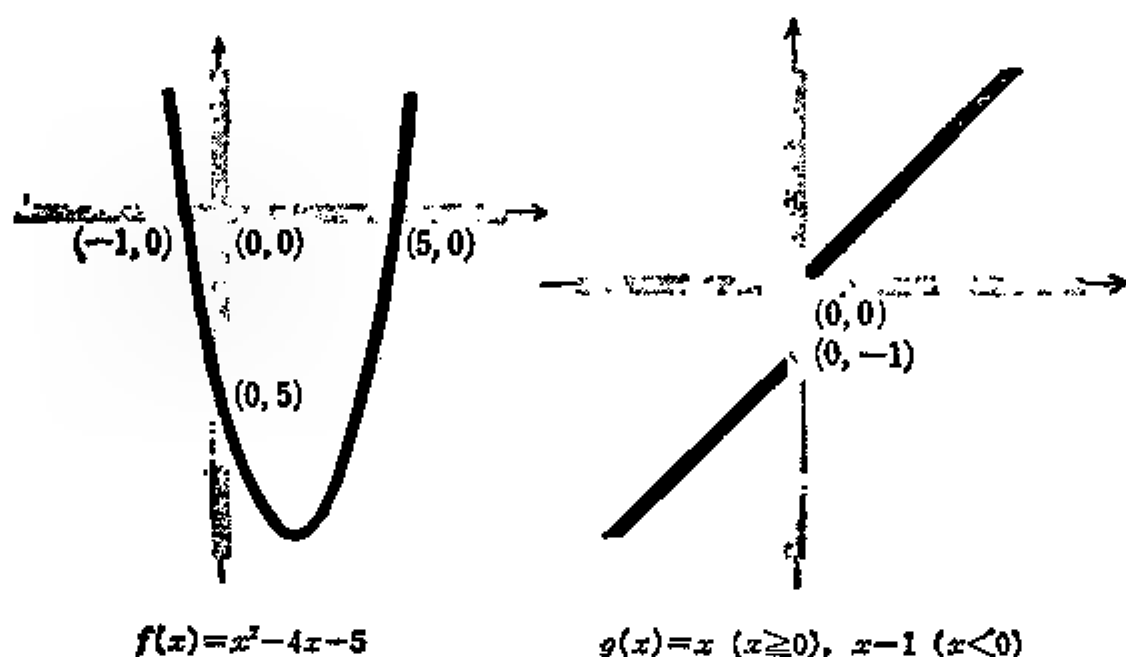


图 5-18

的图象画出来，从图形上看是很清楚的．图 5-18 是表示连续函数 $f(x)=x^2-4x-5$ 和不连续函数 g 的图象．

连续函数的图象总是不间断的，而不连续函数的图象在不连续点却是断开的．到此，作为连续的说明，仅仅使用了极限的概念，现在再用开集的概念换个说法来讨论．

定理 5 设 M 是 R 的某子集，映射 $f: M\to R$ 在 M 的点 x 连续的充分必要条件是，对于含有 $f(x)$ 的任意开集 $U\subset R$，能够确定 x 的开邻域 $V\subset R$，使

$$f(V\cap M)\subset U$$

成立．

由于下图象征性地指出了定理 5 的内容，所以定理的意义是可以理解的．在 x 连续，可用记号记做

$\forall$ 开集 $U\ni f(x)$，$\exists$ 开集 $V\ni x$，$f(M\cap V)\subset U$，

象 $f(x)$ 的开邻域可以任意选取，而与之对应的 x 的邻域 V 需要适当地选取．因此，对于取 $f(x)$ 的任意小的邻域，取 x 的充分小的邻域，…情况，应当确切地进行叙述．把这个定理的

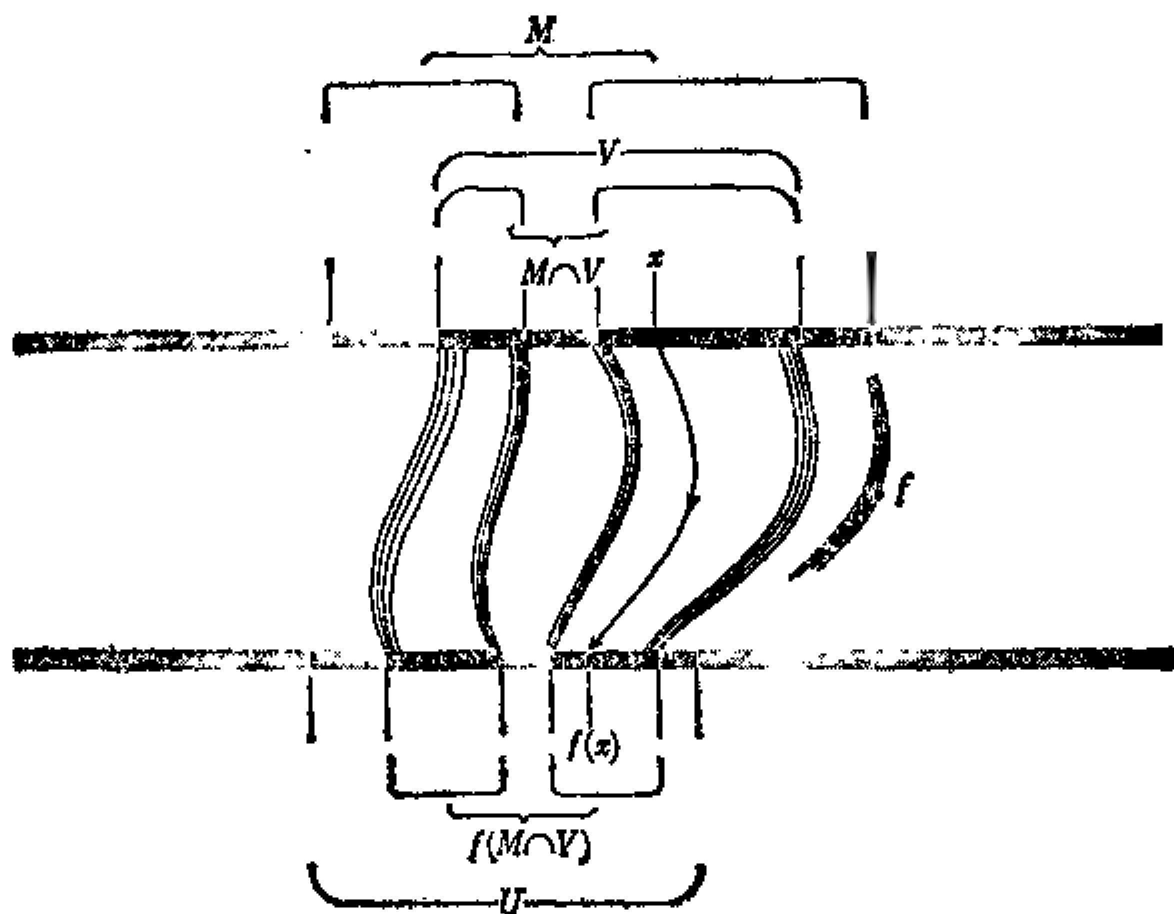


图 5-19

证明写在下面，如果不感兴趣可以把它撂开。

证明 我们首先用开集来描述的连续性定义(定理5的条件)导出用收敛性来刻划的定义．设U是$f(x)$的任意邻域，V是与U对应的x的邻域，使$f(V\cap M)\subset U$．设$\{x_n\}$是收敛于x的M的数列．因为$\{x_n\}$收敛于x，所以存在自然数n_0，使得若$n>n_0$，则$x_n\in V$，显然$x_n\in V\cap M$．因为$f(V\cap M)\subset U$，所以当$n>n_0$时，有$f(x_n)\in U$，因此$\{f(x_n)\}$收敛于$f(x)$，所以f在x连续．反之，从依靠收敛性来陈述的连续定义导出用开集来陈述的连续定义．为此，我们来证明它的对偶命题“映射，若应用开集来说明时不是连续的，则应用收敛性刻划时也不是连续的”．因为映射f在x不连续，所以存在含有$f(x)$的U_0，对于含有x的任何开集V，总能找到使$f(y)\notin U_0$

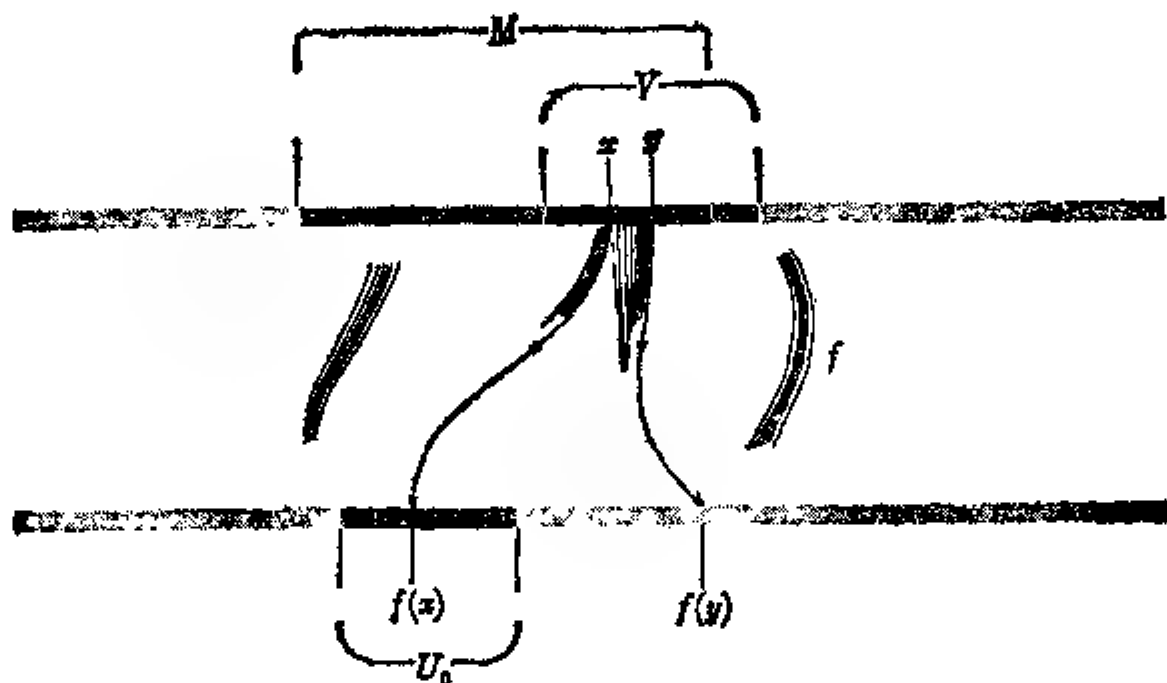


图 5-20

的 $V\cap M$ 的点 y（图20）. 由此，对于所有正整数 n 设

$$V=\left(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right),$$

则M的点 x_n 有

$$x-\frac{1}{n}<x_n<x+\frac{1}{n},$$

且 $f(x_n)\notin U_0$. 这样得到的数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，但因 $f(x_n)\notin U_0$，所以 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 $f(x)$，因而 f 在 x 不是连续的.

若把定理 5 的开邻域 V，U 换成开区间 $(x-\delta,\ x+\delta)$，$(f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon)$，就是大学课本中关于连续的 ε，δ 定义. 也就是：

推论 设函数 $y=f(x)$ 是定义在R的子集M上的函数，x 是 M 的点. f 在 x 连续的必要充分条件是，对于已给的数 $\varepsilon>0$，总能确定数 $\delta>0$，使得

若 $y\in M$，且 $|y-x|<\delta$，则 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$

成立.

当映射 $f: M\to R$ 在M的所有点上连续时，可简单地说 f 是连续的. 关于这个问题还可以叙述如下.

定理 6 设M是R的子集. 映射 $f: M\to R$ 连续的充分必要条件是，对于R的任意开集 U，总能确定开集 $V\subset R$，使

$$f^{-1}(U)=V\cap M.$$

显然，定理的证明只要经过思考就能完成，但是为了方便尚不习惯于这样构思的读者，下面给出证明.

证明 设 x 为 $f^{-1}(U)$ 的点. 因 f 在 M 上连续，所以在M的各个点 x 连续. 根据定理 5，存在 x 的邻域 V_x，使得 $f(V_x\cap M)\subset U$. 因此有

$$f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}(V_x\cap M)=\left(\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}V_x\right)\cap M,$$

因为开集的并还是开集，所以 $\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}V_x$ 就是所求的开集 V. 反之，如果满足条件，根据定理 5，在M的各个点连续，因此在M上连续.

推论 映射 $f: R\to R$ 连续的充分必要条件是，对于R的所有开集 U，$f^{-1}(U)$ 仍然是开集.

以上，关于实数直线R的拓扑学的考察大致结束.

第六章 拓扑空间

§1 拓扑空间

在第五章中，我们大致地讨论了实数直线的拓扑学．所谓实数直线，是代表着平面上一条直线的几何形象的．为了研究实数直线上的拓扑学，我们在实数直线上导入了坐标系，并且提出了一个前提条件，那就是直线上的点和实数集之间的对应是双射．如前所说，这样的前提是否真的正确，在平面上所见到的直线是否真的和实数集是同构的，我们还没有办法弄清楚．因而，我们就索性在那种假定下导出了实数直线的各种性质．这件事如果反过来说，那就是：和实数同构的如我们在平面上所能见到的那样的直线，为什么作为几何学的对象是实数直线．

现代数学总是建立在若干假定之上．作这种假定的方式很多，但一般说来，是用其对象具有的性质来选取假定．这种假定在数学中称为**公理**．

现在我们即将讨论的拓扑空间，是以实数直线的拓扑学所研究过的事项为蓝本，反过来采用它作为公理系统，用满足公理系统的集合来确定拓扑空间．就是说，在非数的一般集合中导入实数的拓扑性质作为几何对象，那就是拓扑空间．也就是，拓扑空间是实数直线这种概念的推广．

在实数直线的拓扑学中，最基本的概念是数列(点列)收敛的概念．而且点列收敛的概念，实际上是可用开集的概念来表现的．另外，我们已知其它的重要概念，如闭集、连续函数等也都可用开集来表示．因此，我们打算使用开集的概念

来定义拓扑空间．所谓拓扑空间，是指集合X里给定叫做开集的某种子集族．若把集合只看做集合，如同实数直线看做实数那样，并不能自然而然地确定开集族，需要选出集合X的子集族，而且确定它的成员是开集．对于集合X，哪个子集族可规定为开集，就看集合X用于什么目的而定．但是，根据实数直线讨论的情况可知，它不是集合X的任意的子集族．一个子集族，如果它不满足第五章定理2中所说的实数直线的开集族所满足的性质，那么拓扑空间是不能由实数直线的推广而得到的．因此，可以把满足实数直线的开集族的定理2作为公理系统，集合X中满足这个公理系统的子集族就是X的开集族，由此也就规定了开集．把这种开集族叫做空间X的**拓扑**．也就是，当集合X的子集族$\mathfrak{T}$满足如下公理1—5时，集合X伴同集族$\mathfrak{T}$叫做**拓扑空间**．而且把集族$\mathfrak{T}$叫做它的拓扑．把作为拓扑$\mathfrak{T}$里的元素的X的子集叫做空间X的**开集**．

公理1　集合X是开集．

公理2　空集是开集．

公理3　对于X的任意点x，至少存在含有x的开集．

公理4　任意多个开集的并集是开集．

公理5　有限多个开集的交集是开集．

当熟悉了拓扑$\mathfrak{T}$，特别是不致引起混乱时，简单地把X叫做拓扑空间，或者更简单地把X叫做**空间**．

首先，需要注意几个问题．前边所说的5个公理并不是相互独立的．公理1是说集合X是开集，但是这个公理实际上可以从公理3和公理4得到．就是说，关于X的任意点，至少存在一个含有该点的开集，如果用U_x表示，那么就可得到一个开集族$\mathfrak{U}=\{U_x|x\in X\}$．如果作出所有这些开集的并集，根据公理4，它仍然是开集．而这个并集是

$$\bigcup_{x \in X} U_x \supset X, \quad \bigcup_{x \in X} U_x \subset X,$$

也就是 $\bigcup_{x \in X} U_x = X$，这样就导出了$X$是开集． 另外，公理2是说空集是开集，但是这个公理实际上也是不需要的． 这是因为在公理 5 中所说的有限个开集当然也包含 0 个开集，这虽然有些牵强附会，但如果按这样解释，取 0 个开集等于什么也没取，所以作为它们的交集仍然是空集．于是，根据公理5，空集是开集． 因此，公理 2 也不是独立的条件．结果是，公理 1，2 可从其余公理 3，4，5 导出来．然而，在考虑空间的拓扑时，公理 1，2 的内容还是需要的，由于它容易被忽视，所以常把它作为公理．

因此，所谓拓扑空间，就是集合 X 和满足 5 个公理的子集族，也就是拓扑 $\mathfrak{T}$ 所构成的对

$$(X, \mathfrak{T}).$$

就是说，所谓拓扑空间，可以看做在集合 X 上给以拓扑 $\mathfrak{T}$ 而得到的一个构造．因此，如果两个拓扑空间是**相同的**，首先它们必须是相同的集合，同时它们各自的拓扑也必须是相同的子集族．

实数集 R，如果把它看做开集族，则它满足第五章中定理2的公理 1—5，所以它是拓扑空间.这个拓扑空间是在第五章中讨论过的实数直线，拓扑 $\mathfrak{T}$ 叫做实数直线这种拓扑空间 R 的**标准拓扑**.所以称为标准拓扑，是因为在同一实数集上有不同的拓扑.例如，我们考虑实数的子集的全体，也就是集族2^R，它是满足公理 1—5 的集族．因此，以 2^R 为拓扑的 R 是一个拓扑空间．如果把它作为集合，虽然取到同样的实数，但是标准拓扑不同(在实数直线中，虽有非开集的子集，但如果以2^R为拓扑，则任何一个都是开集)，由于得到更大的集族，所以这个空间不是实数直线． 一般地，当取任意集合 X 时，X 的全体

子集即 2^X 满足公理 1 到公理 5，可把它作为 X 的拓扑．这个拓扑叫做 X 的**离散拓扑**．具有离散拓扑的拓扑空间，因为它的任何子集都是 2^X 的元素，所以是开集，也就是，它是任意子集都是开集的拓扑空间，而且不存在非开集的集合．这一事实，在本质上和完全不考虑拓扑是相同的．

其次，对于任意集合 X，我们来考虑由 X 本身和 $\varnothing$ 两个元素构成的集族．这个集族也满足公理 1—5．这样的拓扑叫做**平凡拓扑**．这样，任一集合和它的平凡拓扑作成的对可作为拓扑空间，但是平凡拓扑空间和离散拓扑空间都没有多大意义．

在拓扑空间中，集合 X 不必都是无限集合．例如，对于由三点构成的有限集合

$$X=\{a,b,c\},$$

设

$$\mathfrak{T}=\{\varnothing,\{a\},\{a\}\cup\{b\},\{a\}\cup\{c\},X\},$$

它满足公理 1，2是明显的．它也满足公理 3，因为对于 a 有 $\{a\}$ 或 $\{a\}\cup\{b\}$，对于 b 有 $\{a\}\cup\{b\}$，对于 c 有 $\{a\}\cup\{c\}$．再看公理 4，不管 $\mathfrak{T}$ 的哪两个集合相加，仍是 $\mathfrak{T}$ 中之一．进而考虑公理 5，例如若 $\{a\}\cup\{b\}$ 和 $\{a\}\cup\{c\}$，则有 $\{a\}\in\mathfrak{T}$，所以也

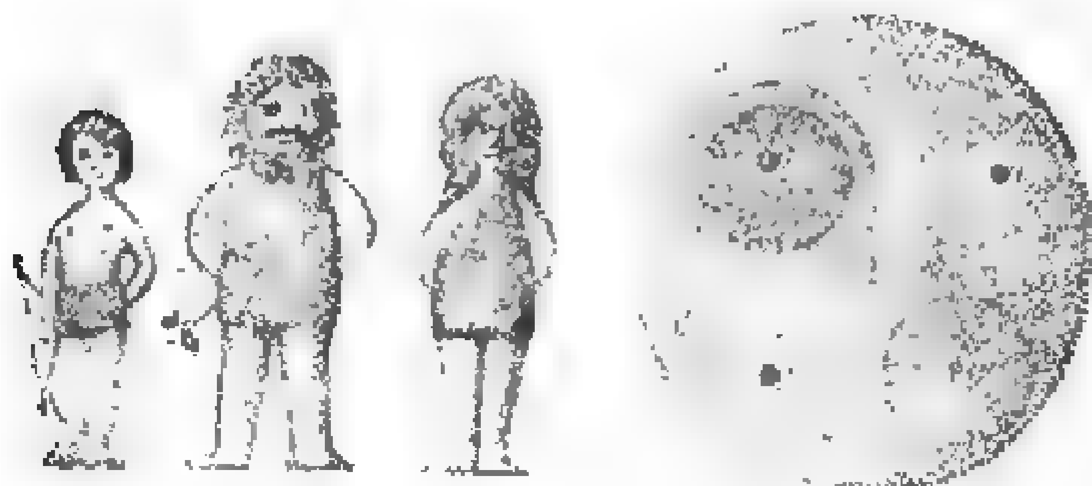


图 6-1

满足公理 5．由此，因为这个集合确实满足公理 1—5，所以这个集合 X 以 $\mathfrak{T}$ 为拓扑构成一个拓扑空间．

§2 拓扑基

按前面所说的所谓拓扑空间，是用满足公理 1—5 的拓扑，把原来实数直线的有关收敛等的拓扑概念推广为一般集合上的概念．如在上面的例子中看到的那样，任何集合，赋与某种拓扑之后可以看做拓扑空间．于是，对于已知的集合可以直接研究拓扑空间的各种概念．

设 $\mathfrak{U}$ 是集合 X 的某子集族，说 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{U}$ 的某子集族 $\mathfrak{B}$ 生成的，是指如下事实成立．

X 的子集 K 是 $\mathfrak{U}$ 的元素的充分必要条件是，K 是 $\mathfrak{B}$ 的元素的并集．也就是，$\mathfrak{U}$ 的任何元素 K 都是 $\mathfrak{B}$ 的某些元素的并集．

设 $\mathfrak{B}$ 是以 $\mathfrak{T}$ 为拓扑的拓扑空间 X 的集族，当拓扑 $\mathfrak{T}$ 是由 $\mathfrak{B}$ 生成的时候，$\mathfrak{B}$ 叫做 $\mathfrak{T}$ 的**基**．（对于任何子集族，都假定 $\varnothing$ 是它的元素．）

以上所述未免有些过分抽象了．拓扑空间是由集合 X 和它的拓扑 $\mathfrak{T}$ 确定的．如前边的例子 $X=\{a,b,c\}$ 那样，如果 X 是有限集合，那么它的拓扑 $\mathfrak{T}$ 的所有元素都可写出来．然而，一般地，当 X 是无限集合时，不可能写出 $\mathfrak{T}$ 的全部元素．因此要考虑生成 $\mathfrak{T}$ 的 $\mathfrak{T}$ 的基 $\mathfrak{B}$．因为 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{T}$ 的子集族，如果选取的适当可使讨论简化．因此，基是简便表示 $\mathfrak{T}$ 的一种权宜的方法．例如实数直线的 $\mathfrak{T}$ 的元素是开集，对于开集 U 的任意点 x 可得到使 $x\in(a,\ b)\subset U$ 成立的开区间 $(a,\ b)$．由于 (a,b) 是对 x 而确定的，所以可用 $(a,\ b)_x$ 表示．于是，有

$$U=\bigcup_{x\in U}(a,\ b)_x,$$

而U是开区间的并集. 由此，若设$\mathfrak{B}$为开区间全体的集合，则$\mathfrak{B}$是拓扑$\mathfrak{T}$的基. 显然，因为$\mathfrak{T}$是$\mathfrak{T}$的基(根据公理4)，所以一般来说，基可有好些个.

因此，下述事实是必要的.

定理 设$\mathfrak{B}_1$和$\mathfrak{B}_2$是集合X的子集族，$\mathfrak{B}_1$和$\mathfrak{B}_2$生成X的同一拓扑$\mathfrak{T}$的充分必要条件是，下列(i)，(ii)成立.

(i) 若已给$\mathfrak{B}_1$的元素U，对于U的任意元素x，有$\mathfrak{B}_2$的元素V，使

$$x \in V \subset U$$

成立.

(ii) 若已给$\mathfrak{B}_2$的元素V，对于V的任意元素y，有$\mathfrak{B}_1$的元素U，使

$$y \in U \subset V$$

成立.

我们将在后面举出这个定理的例子. 当然可把定理的条件变成它的对称形式，而且还是很有趣的.

当已知集合X和它的子集族$\mathfrak{T}$时，为了弄清$\mathfrak{T}$是否是拓扑，可用公理1—5来检验. 但是当$\mathfrak{T}$是由$\mathfrak{B}$生成的时候，下面的定理是很方便的.

定理 设X为集合，而$\mathfrak{T}$是它的子集族，当$\mathfrak{T}$是由$\mathfrak{B}$生成的时候，X是以$\mathfrak{T}$为拓扑的拓扑空间的充分必要条件是，下列的(i)和(ii)成立.

(i) 对于已给的X的点x，存在$\mathfrak{B}$的元素U，使$x \in U$.

(ii) 若已给$\mathfrak{B}$的元素U，V，对于$U \cap V$的任意点x，存在$\mathfrak{B}$的元素W，使

$$x \in W \subset U \cap V.$$

(显然W仅考虑$U \cap V \neq \varnothing$的情形即可.)

§3 拓扑积

拓扑空间 X，当它的拓扑基是 $\mathfrak{B}$ 时，有时用 $(X, \mathfrak{B})$ 表示。设 $\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{B}_2$ 是某集族，H_1，H_2 分别是 $\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{B}_2$ 的某元素。又，当 h_1，h_2 是 H_1，H_2 的任意点时，序对 (h_1, h_2) 的集合用 F 表示。即取 $F = H_1 \times H_2$。这样的 F 的集合用 $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ 表示（其中 H_1，H_2 分别是在 $\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{B}_2$ 中任意取的元素）。实际上，这就是集族 $\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{B}_2$ 的直积。于是，当 $(X_1, \mathfrak{B}_1)$ 和 $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ 是拓扑空间时，根据下面的定理，$(X_1 \times X_2, \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$ 也是拓扑空间，并把它叫做 $(X_1, \mathfrak{B}_1)$ 和 $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ 的**拓扑积**，或者叫做**积空间**。

定理 当 $(X_1, \mathfrak{B}_1)$ 和 $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ 是拓扑空间时，拓扑积 $(X_1 \times X_2, \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$ 是拓扑空间。

如果能够证明，在 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 满足拓扑基定理条件的假定下，$\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ 也满足拓扑基定理的条件即可。

若取开区间所构成的集族作为 R 的基 $\mathfrak{B}$，则 $(R, \mathfrak{B})$ 是具有标准拓扑 $\mathfrak{T}$ 的拓扑空间。它就是实数直线，也叫做**一维实数空间**。于是，根据上述定理，它的拓扑积 $(R \times R, \mathfrak{B} \times \mathfrak{B})$ 是拓扑空间，简单地用 R^2 表示，并把它叫做**二维实数空间**或者叫做平面。R^2，已在研究集合时，把它看做平面的点的集合。若任意取 R^2 的拓扑基里的成员 U_1，U_2，因为 U_1，U_2 分别是开区间 (a, b)，(c, d)，所以，如果象图 6-2 那样作出 $U_1 \times U_2$，则它是 R^2 的开矩形

$$U_1 \times U_2 = \{(x, y) | a < x < b, \ c < y < d\},$$

也就是，去掉周边的矩形的集合。

从而，二维实数空间 R^2 是平面上点的集合，是平面上所有开矩形构成的子集族为基而生成的拓扑空间。

显然，不仅可用两个空间来确定拓扑积，也可用 3 个，4

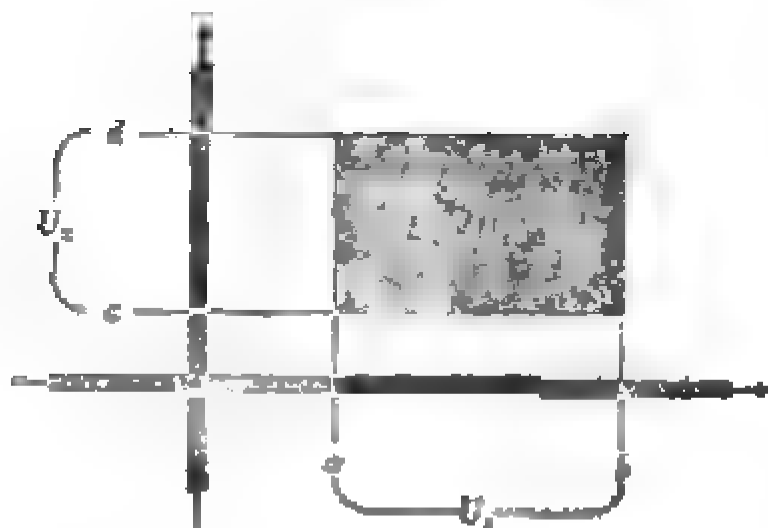


图 6-2

个，…空间确定拓扑积．因此，

$$(R \times R \times R, \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B})$$

是三维实数空间 R^3，因为它和 $((R \times R) \times R, (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{B}) = (R^3, \mathfrak{B}^3)$ 是相同的，所以它是二维实数空间乘以一维实数空间．因此，R^3 就是我们居住着的空间中点的集合，因为它的拓扑基是开区间×开区间 × 开区间 = 开矩形×开区间，所以是开立方体(图 6-3)

$$U_1 \times U_2 \times U_3 = \{(x, y, z) | a < x < b,$$
$$c < y < d, e < z < f\}.$$

一般地，n 维实数空间$(R^n, \mathfrak{B}^n)$是以 n 维开立方体

$$U^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | a_i < x_i < b_i, i = 1, \cdots, n\}$$

为它的拓扑基．简单地用 R^n 表示．

因为集合的直积是就无限个集族定义的，所以当已知一族无限多个拓扑空间 $\{(X_\mu, \mathfrak{B}_\mu)\} \mu \in M\}$时，它的拓扑积或直积空间作为集合可取 $\Pi_\mu X_\mu$，它的基同样地可由 $\Pi_\mu \mathfrak{B}_\mu$ 确定，但这会引起很多不便．因此，通常是先固定某一个 X_μ，并取 $\mathfrak{B}_\mu$的一个元素 U_λ，使

$$U = \{x | p(x) = x_\mu \in U_\lambda\},$$

$(R\times R\times R, \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\times\mathfrak{B})$

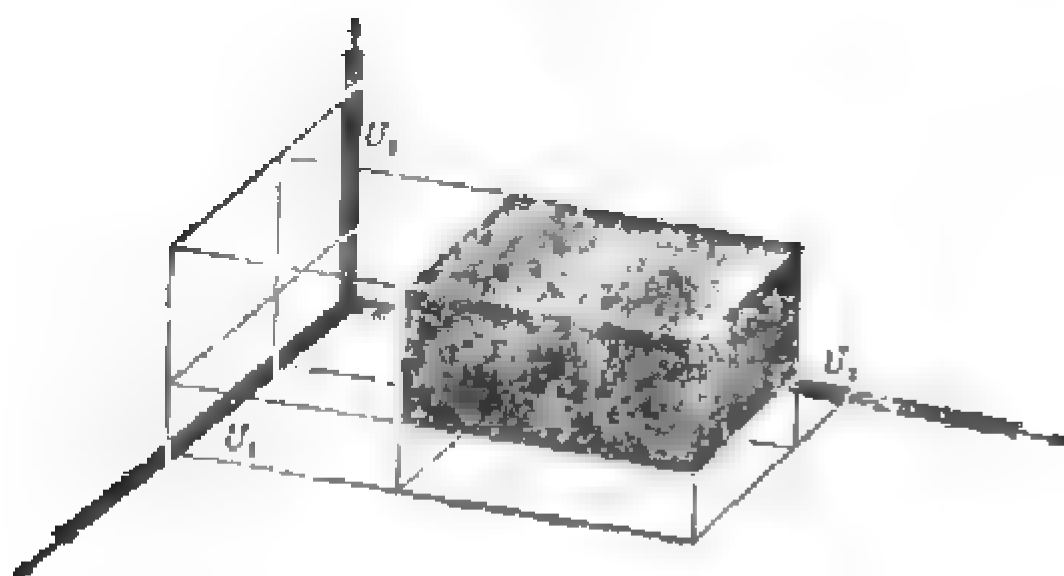


图 6-3

就是说，向 μ 坐标的射影由 U_λ 确定了 $\Pi_\mu X_\mu$ 的点 x 的集合 U，这样的 U 是由基 $\mathfrak{B}_\mu$ 的每个元素 U_λ 确定的，同样对于所有的 μ，作出 $\Pi_\mu X_\mu$ 的子集族，然后作这个集族的有限个元素的交集(含有原来的集族)，再以如此得到的 $\Pi_\mu X_\mu$ 的子集族作为它的拓扑基而在 $\Pi_\mu X_\mu$ 上生成一个拓扑． 这样作得的 $\Pi_\mu X_\mu$ 的拓扑叫做**弱拓扑**．

特别地，这样作得的可数个 $\aleph_0$（即，与自然数集同基数的无限个）实数直线 R 的积空间 $R^{\aleph_0}$ 叫做**可数维实数空间**． 显然，这样作出弱拓扑的办法也适用于连续基数 ω 个 R 的拓扑积 R^ω．

§4 度量空间

在讨论拓扑空间的一般性质之前，我们先考虑在分析学中所使用的距离概念以及它和拓扑空间的关系．实数直线 R 的两点 p, q 之间的距离 $\rho(p, q)$ 用

$$\rho(p, q) = |p - q|$$

表示. 平面R^2的两点$p(x_1, y_1)$和$q(x_2, y_2)$之间的距离$\rho(p, q)$用

$$\rho(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

表示. R^3的两点$p(x_1, y_1, z_1)$和$q(x_2, y_2, z_2)$之间的距离$\rho(p, q)$用

$$\rho(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

表示. 由此类推, n维实数空间R^n的两点$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$之间的距离$\rho(p, q)$用

$$\rho(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

表示.

这样在$R, R^2, \cdots, R^n, \cdots$的$n$维数空间所确定的距离$\rho$叫做**欧几里得度量**,集合$R^n$和度量$\rho$构成的对$(R^n, \rho)$叫做$n$**维欧几里得空间**,特别是在不会引起混乱时, n维欧几里得空间只用R^n表示.

n维欧几里得空间R^n的欧几里得度量ρ有如下条件, $\rho(p, q) \geqslant 0$, $\rho(p, q) = 0$的必要充分条件为$p = q$, 又$\rho(p, q) = \rho(q, p)$, 而且, ρ具有我们熟知的性质

$$\rho(p, q) + \rho(q, r) \geqslant \rho(p, r)$$

(三角形的两边之和不小于第三边).

一般来说,可确定距离的集合, 除欧几里得空间之外, 是很多的, 但是我们知道它们都满足上述性质. 为了统一处理它们,首先给出如下定义是必要的.

所谓集合X是**度量空间**,是指可用满足下列性质的映射

$$\rho: X^2 \to R$$

定义的.

公理 1 对于X的任意两点x, y, $\rho(x, y) \geqslant 0$.

公理 2 $\rho(x, y) = 0$的充分必要条件是$x = y$.

公理 3 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

公理4　三角形公理　对于X的任意三点x, y, z，$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$成立。

映射ρ叫做集合X的**度量**。确切地说，X和ρ组成的对(X, ρ)是度量空间。如n维欧几里得空间就是度量空间的典型。当两个度量空间的集合相同，它们的度量也是同一映射时，就说两个度量空间是相同的。

对于可数无限维实数空间$R^{\aleph_0}$的两点$p(x_1, x_2, \cdots)$和$q(y_1, y_2, \cdots)$，$R^{\aleph_0}$的度量姑且认为是

$$\rho(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2},$$

但是，一般说来$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2$不是数，也就是，数列

$$\left\{a_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right\}$$

不一定收敛。例如，若设$x_i = 1, y_i = 0$，则$\{a_n\} = \{n\}$，而$\{n\}$是发散的。由于这种原因，在$R^{\aleph_0}$中含有不能确定ρ的点，所以ρ不是$R^{\aleph_0}$的度量。

因此，我们现在考虑使$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$收敛的$R^{\aleph_0}$的点x的全体。在这样$R^{\aleph_0}$的子集L的任意两点p, q之间，上述的$\rho(p, q)$收敛，从而ρ是度量，而L是度量空间。这种可数无限维的度量空间叫做**希尔伯特(Hilbert)空间**。

我们已知，对于任何集合X，只要适当地给与拓扑(如离散拓扑)，就能构成拓扑空间，这时，对于任意集合X，如果令$\rho: X^2 \to R$，

$$x \neq y, \quad \rho(x, y) = 1,$$
$$x = y, \quad \rho(x, y) = 0,$$

则(X, ρ)满足公理1—4，而构成拓扑空间。显然，这种度量

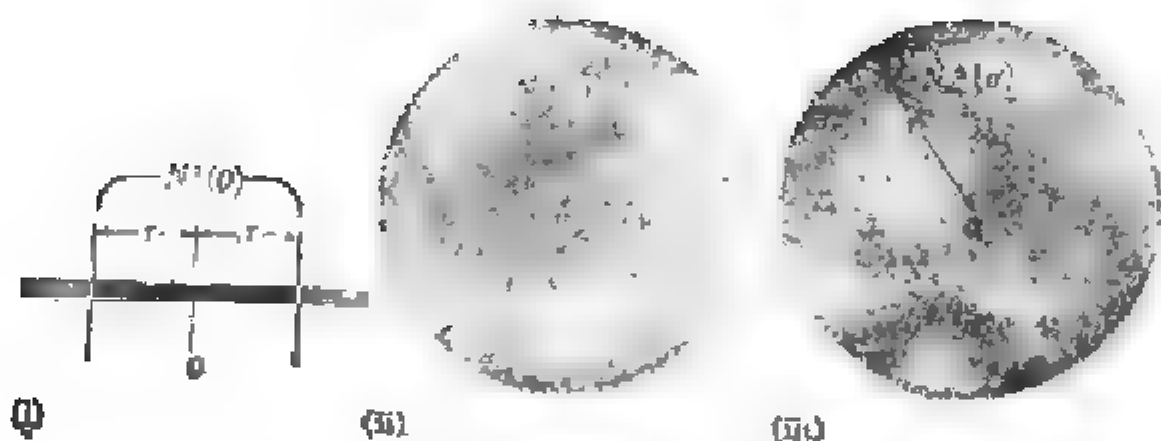


图 6-4

ρ没有多大的实用价值。

设X是拓扑空间，x是X的点，r是>0的实数，用$N_r(x)$表示$\rho(x, y)<r$的X的点y的集合。也就是

$$N_r(x)=\{y \mid \rho(x, y)<r\} \subset X,$$

$N_r(x)$叫做**开球邻域**。(之所以称为开球邻域，以后会知道它是拓扑空间的邻域,在此只希望暂时承认这个名称。)

例如,若R为一维的欧几里得空间,则$N^1_r(o)$为图6-4(i)那样的长为$2r$的开区间，若R^2为二维的欧几里得空间，则$N^2_r(o)$为图6-4(ii)那样的半径为r的开圆盘，若R^3为三维欧几里得空间,则$N^3_r(o)$为图6-4(iii)那样的半径为r的开球(仅球的内部)。

X为度量空间，它的开球邻域$N_r(x)$是由哪一点x为中心,怎样的长度r为半径而定。因为x是X的所有点，r是$0<r$的所有实数值，所以族$\{N_r(x)\}$是带有X的点x和$0<r$两个实数的无限族。而且应用这个族可以得到度量空间和拓扑空间的如下关系。

设X是度量空间,ρ是它的度量。若以$\mathfrak{B}$表示X的所有开球邻域的集族,则$(X, \mathfrak{B})$是拓扑空间,即$\mathfrak{B}$是X的某个拓扑基。

就是说，集族 $\{N_r(x)|0<r, x\in X\}$ 满足本章中基的定理条件(i)和(ii)。在此不对它做特别证明，但对(i)来说，$x\in N_r(x)$ 是明显的。其次，设 $N_r(x)$ 和 $N_r(y)$ 是 X 的两个开球邻域，而 w 是 $N_r(x)\cap N_r(y)$ 的点。用 δ 表示 $t-\rho(w, y)$ 和 $r-\rho(w, x)$ 中小的那一个。于是，有 $N_\delta(w)\subset N_r(x)\cap N_t(y)$。原因是，若 z 是 $N_\delta(w)$ 的点，则 $\rho(z, x)\leqslant\rho(z, w)+\rho(w, x)<\delta+\rho(w, x)\leqslant r$，由此 $\rho(z, x)<r$，所以 $z\in N_r(x)$。同理，$z\in N_t(y)$。所以对(ii)来说，也是正确的。

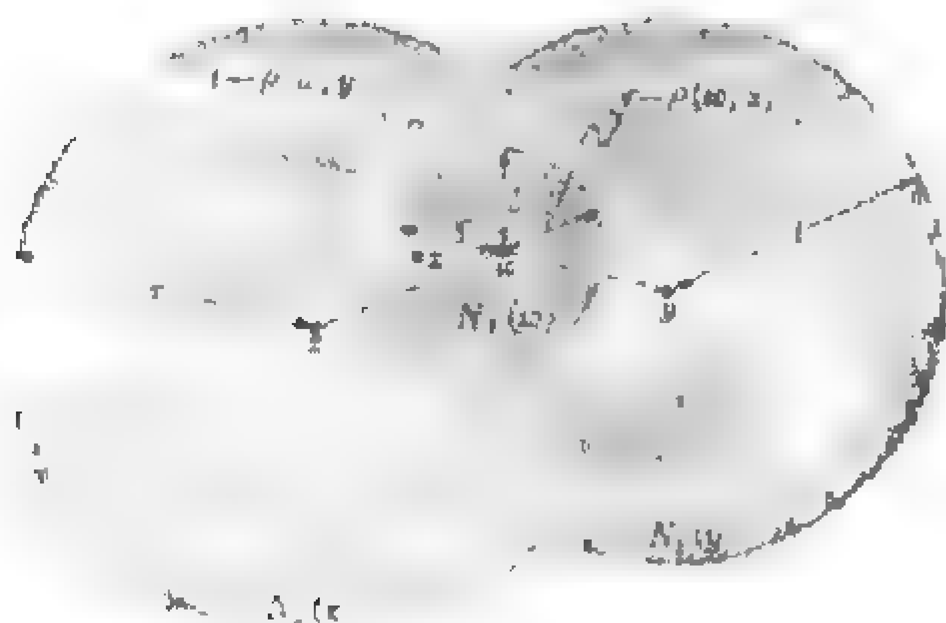


图 6-5

总之，任意度量空间 (X, ρ) 总是(使用它的度量 ρ)以开球邻域系作为基，极其自然地导入拓扑 $\mathfrak{T}$ 而使 X 成为拓扑空间。在这种意义下，可以说度量空间是拓扑空间。而且这种自然确定的拓扑 $\mathfrak{T}$ 叫做以 ρ 为度量的**诱导拓扑**。它的空间 X 叫做由 (X, ρ) **诱导的拓扑空间**。

n 维实数空间 R^n，象在本章中已指出的那样，是以开立方体的族为基 $\mathfrak{B}_1$ 的拓扑空间。

另一方面，如果从 n 维欧几里得空间的欧几里得度量来说，n 维开球邻域是基 $\mathfrak{B}_2$。这种 n 维开球邻域，象在它的定义中所说的那样，若 $n=1$，实际上是开区间。由此，在一维的情形中，两个基 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 是一致的，因此一维欧几里得空间如果看做以它的度量诱导的拓扑为拓扑的拓扑空间，那么前边所说的一维实数空间(实数直线)就是完全相同的拓扑空间。若 $n=2$，二维开球邻域是圆盘。可是，如从下面的图 6-6 看到的那样，它说明了：

(i) 取开矩形的任何一点 x，总能作出含于开矩形的含有点 x 的开圆盘。

(ii) 取开圆盘的任何一点 x，总有含于开圆盘的含有点 x 的开矩形。



(i)　　　　(ii)

图 6-6

因此，由于满足本章中基的定理的条件 (i) 和 (ii)，所以 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 两个基生成相同的拓扑。这样一来，二维欧几里得空间如果看做以它的度量诱导的拓扑为拓扑的拓扑空间，那么就是前边所说的二维实数空间。

同样，对于一般的 n 维欧几里得空间如果看做以它的度

量诱导的拓扑为拓扑的拓扑空间，它就是 n 维实数空间. 在这种情形下，实际上虽然稍有差别，但是对 n 维欧几里得空间、n 维实数空间，今后都用同一记号 R^n 表示. 现在我们约定，把这两者完全混同使用. 因此当提到 n 维欧几里得空间时，即考虑它的度量，又可简单地看做 n 维实数空间. （最近美国的 F.安德森（Anderson）指出，希尔伯特空间，在上述意义下，是可数无限维实数空间。）

由上述定理自然发生疑问，度量空间是拓扑空间，反之，拓扑空间是否是度量空间呢. 详细地说，当已知某拓扑空间 $(X, \mathfrak{T})$ 时，是否能导入度量 ρ，使 X 成为度量空间，但以它的开球邻域系的族为基生成的拓扑恰好是已知拓扑空间的拓扑 $\mathfrak{T}$. 实际上，这是未必成立的. 也就是说，度量空间是具有特别性质的拓扑空间. 其特别性质之一如下.

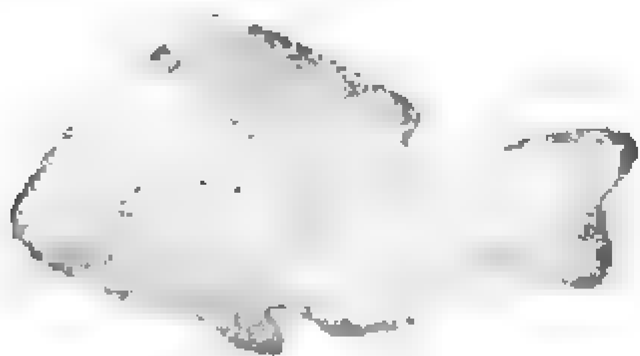


图 6-7

拓扑空间是**豪斯道夫**（Hausdorff）空间，是指对于 X 的两个相异点 x, y，必有开集 U 和 V，使 $x \in U$ 和 $y \in V$，且

$$U \cap V = \varnothing$$

（也就是，两个相异点具有不相交的各自的开邻域）.

定理 度量空间是豪斯道夫空间. 详细点说，从度量空间诱导出的拓扑空间是豪斯道夫空间.

对此定理，首先设 X 是度量空间，而 ρ 是它的度量. 根据

度量的公理 2，因 $x \neq y$，所以 $\rho(x, y) > 0$，且存在 $r > 0$ 使得 $0 < 2r < \rho(x, y)$ 成立。若设 $N_r(x)$，$N_r(y)$ 分别为 U，V，则应用三角形公理，有 $U \cap V = \varnothing$。显然，U，V 分别是 x，y 的开邻域。这样一来，n 维欧几里得空间 R^n（诱导的 n 维实数空间）是度量空间，而且是豪斯道夫空间。但是，前述的由三个点构成的拓扑空间 $X = \{a, b, c\}$ 却不是豪斯道夫空间，原因是，若 $\mathfrak{T} = \{X, \varnothing, \{a\}\{a\} \cup \{b\}, \{a\} \cup \{c\}\}$，因 $b \neq c$，所以含有 b 的邻域是 $\{a\} \cup \{b\}$ 和 X，含有 c 的邻域是 $\{a\} \cup \{c\}$ 和 X，以它们哪一个作为 U，V，都有 $U \cap V \ni a$，即 U 和 V 不是不相交的。因此，这个拓扑空间的拓扑是不可能从 X 的任何度量诱导出来的。这意味着

$$\text{度量空间} \subsetneqq \text{拓扑空间},$$

也就是，可以说：度量空间的总体是拓扑空间总体的真子集。

第七章　拓扑空间的性质

§1　闭集

如在第五章中所说的那样，有关实数直线R的拓扑性质，全是用开集族表示的．拓扑空间和度量空间，是把实数直线的有关拓扑性质导入到一般集合所成的空间，所以在拓扑空间X（简单地称为空间）的研究中，R的定义、定理（以及它的证明方法）当然是非常有用的．具体说来，和第五章中的情况有所不同，现在是要以开集族即拓扑作为出发点而形成理论．因此，在以后，为了说明如何把特别的空间R的结果推广到任意集合X，有时要引用第五章的有关部分．

设X是空间，x是X的点，X的子集U是含有x的开集（和第五章中的情形完全相同），这时U叫做x的**开邻域**．

所谓空间X的子集F是空间X的**闭集**，是指补集$X-F$是开集．（和第五章中的情况有所不同，第五章的定理4在此变为定义．）

于是，可以证明如下定理．

定理　空间X的子集G是开集的充分必要条件是，对于G的任意点x，存在含于G的x的开邻域U．

这个定理的必要性，由公理3（82页）是显然的．又，若对点x所确定的开集设为$U_x(\subset G)$，则有 $G=\bigcup_{x\in G}U_x$，根据公理4，G是开集，所以充分性也成立．这里关于开集的特征是非常重要的．应用拓扑空间的公理以及这里所说的定义和集合的德·摩尔根公式，也可证明如下的两个定理．

定理　空间X的子集$\varnothing$和X，两者都是开集，又都是闭

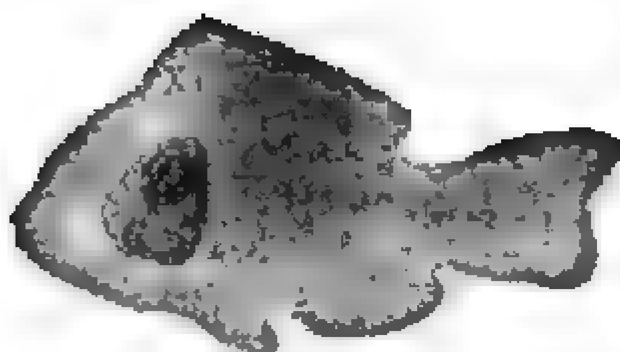


图 7-1

集。

定理 在空间X中，

(i) X的任意多个闭集的交集是闭集。

(ii) X的有限多个闭集的并集是闭集。

为要证明 (i)，若设闭集族为 $\{F_\mu | \mu \in M\}$，则

$$\{X - F_\mu | \mu \in M\}$$

是开集族，根据公理 4，$\bigcup_\mu (X - F_\mu)$ 是开集。因此，

$$X - \bigcup_\mu (X - F_\mu)$$

是闭集。可是根据德·摩尔根公式，

$$X - \bigcup_\mu (X - F_\mu) = \bigcap_\mu (X - (X - F_\mu)),$$

又因 $X - (X - F_\mu) = F_\mu$，所以

$$X - \bigcup_\mu (X - F_\mu) = \bigcap_\mu F_\mu,$$

于是 $\bigcap_\mu F_\mu$ 是闭集。

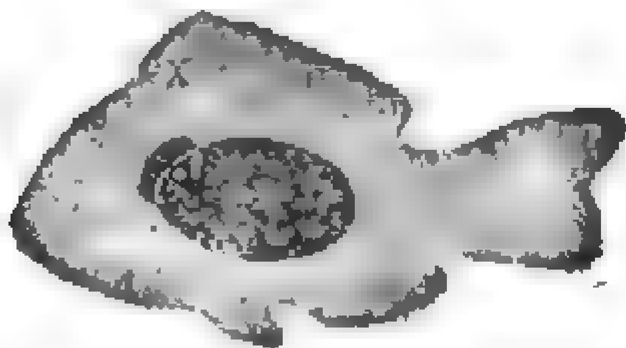


图 7-2

空间X的点x是X的子集A的**聚点**，是指x的任意开邻域含有异于x的A的点y(这是第五章中的定理3)。如用文氏图表示，就象图7-2那样。这是有关概念的象征性的图形。A的聚点的集合用A'表示，A'叫做A的**导集**。

于是，可证明下面的定理(它在第五章§4中是定义)。

定理 空间X的子集F是闭集的必要充分条件是，F的所有聚点含于F，即$F'\subset F$。

若设A是空间X的子集，则至少有包含A的一个闭集，如X本身。因此，我们来考虑含有A的最小闭集的概念。也就是，当A是空间X的子集时，若用$\{A_\alpha\}$表示含有A的X的闭集族，则根据前述定理，$\cap_\alpha A_\alpha$是闭集，并用$\overline{A}$表示，把$\overline{A}$叫做**触集**或者叫做**闭包**。于是，下面的定理成立。

定理 若A是空间X的子集，

(i) $\overline{A}$是含有A的闭集。

(ii) 若设F为含有A的任意闭集，则有$F\supset\overline{A}$。也就是，$\overline{A}$是含有A的最小闭集。

(iii) $\overline{A}=A\cup A'$

定理 空间X的子集A为闭集的充分必要条件是$\overline{A}=A$。

设空间$X=\{a, b, c\}$，而$\mathfrak{T}=\{X, \{a\}, \{a\}\cup\{b\}, \{a\}\cup\{c\}, \varnothing\}$为拓扑，作出空间$X$的点$a$的$\overline{\{a\}}$。空间$X$的闭集，根据定义，是集族$\{\varnothing, \{b\}\cup\{c\}, \{c\}, \{b\}, X\}$。从而，含有$a$的闭集仅有$X$，所以$\overline{\{a\}}=X$，而不等于$\{a\}$。也就是点$a$不是闭集。和实数直线的各点是闭集相比较可知，空间$X$和$R$是非常不同的空间。下面的定理，实际上就是说明这个理由的。

定理 空间X的点x是闭集，即$\{x\}=\overline{\{x\}}$的必要充分

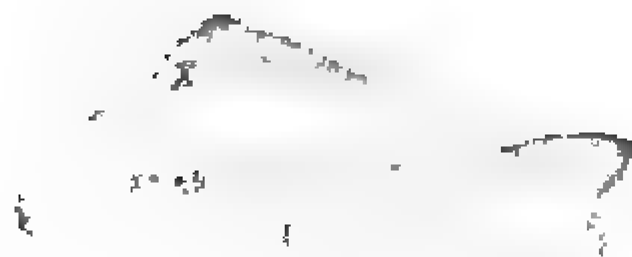


图 7-3

条件是，对于 $X-\{x\}$ 的任意点 y，存在不含有 x 的 y 的开邻域 U。

若 X 是豪斯道夫空间，可得到 x 和 y 的不交的开邻域，显然满足定理的 y 的邻域存在，所以可得如下结果。

豪斯道夫空间的任意一点 x 是 X 的闭集。

在这里，准备介绍与豪斯道夫条件有关的而又不是那么严密的条件。

空间 X 是 T_1-空间，是指在 X 的各点 x，$\overline{\{x\}}=\{x\}$。于是前述定理，实际上可以看做已经给出了 X 是 T_1-空间的充分必要条件。（这里的记号 T 是表示分离的意思，T_1 是表示满足分离公理 1 的空间，而 T_2 是表示满足分离公理 2 的空间。）

下面，我们来确定与集合的闭包有关的概念。

拓扑空间 X 的子集 A，在 X 是稠密的，是指 $\bar{A}=X$。

特别是取 A 为 X 时，因为 X 是含有 A 的最小的闭集，所以 $\bar{X}=X$，也就是 X 在 X 是稠密的，但这是近乎无聊的话。

现在让我们取实数直线 R 作为 X，取有理数(分数)集 Z 作为 A。于是，因为任意实数 x 是有理数数列的极限，所以 $x\in\bar{Z}$，也就是 $\bar{Z}=R$，即有理数集 Z 在实数直线上是稠密的。同样地，若把 R^n 作为 X，把其坐标全是有理数的 R^n 的点集 Z^n 作为 A，则 Z^n 在 R^n 稠密。

因此，所谓 A 在 X 稠密，是指在 X 的任何一点的任何邻近

处都有A的点。在直观上，是说可以用A来代表X。

若应用上述理论，则可证明n维欧几里得空间R^n具有可数基。若R^n的基是$\{N_r(x)\mid x\in R^n,\ r>0$实数$\}$，则无论如何它也不是可数基。不过，若设基为$\{N_r(x)\mid x\in R^n,\ r$ — 有理数$>0\}$，则因点x和r都是可数个，所以它们是原来基的可数的子集。而且，由于Z^n在R^n稠密，也就是有理数集在实数集稠密，所以根据基的定理的(i)，(ii)可以验证

$$\{N_r(x)\mid x\in Z^n, 0<r\in Z\}$$

是R^n的可数基。



图 7-4

欧几里得空间R^n的这些性质和其它空间比较，因为是非常显著的重要性质，所以可引出如下概念。

所谓空间X是**第二可数的**，是指X的拓扑是由可数基生成的；

所谓空间X是**可分的**，是指存在在X稠密的X的可数子集A。

按照上述定义，则n维欧几里得空间是第二可数的而且还是可分的。一般来说，第二可数空间X是可分空间。这是因为，由第二可数的假定有可数基$\mathfrak{B}=\{U_n\}$，取U_n的任意点x_n，则$A=\bigcup_n\{x_n\}$是在X稠密的集合。

因为出现了第二可数的说法，一定会想第一可数为什么还没有说明，下面就来讨论这个问题.

我们考虑，固定空间X的某点x，并设含有x的X的所有开集族为$\mathfrak{U}_x$. 这时，所谓$\mathfrak{U}_x$的子集族$\mathfrak{B}_x$是x的**局部基**，是指对于含有x的$\mathfrak{U}_x$的任意元素U，存在$\mathfrak{B}_x$的元素V，使

$$x \in V \subset U$$

成立.

所谓空间X是**第一可数的**，是指X的任何一点x都具有可数的局部基. 显然，若以开球邻域作为局部基，则度量空间是第一可数的.

在这里，对于第一可数和第二可数概念的定义方法是值得注意的. 它们两者的内容相同之处都是可数的，而两者的不同点在于，第二可数是就空间全体，要求它的拓扑基是可数的，第一可数是固定某一点，要求含有该点的开集族(也可以说是该点的拓扑)的基是可数的. 前者是整体的，后者是局部的.

因此，每当我们确定拓扑性质时，如果它的性质是整体的，那么我们几乎总可能与上述情况类似地构造出局部的概念.

在这里，与实数直线时的顺序相反，我们来研究关于拓扑空间里的收敛问题. 首先，关于收敛的定义，仍然使用第五章的定理1，也就是，

空间X的点列$\{x_n\}$收敛于点x，即

$$\{x_n\} \to x \quad 或者 \quad x_n \to x$$

是指对于x的任意开邻域U，存在n_0，使得当

$$n > n_0 \text{ 时，有 } x_n \in U.$$

在一般的拓扑空间中，可能出现下面那样的奥妙现象. 作为例子，取空间$X = \{a, b, c\}$和拓扑

$$\mathfrak{T}=\{\varnothing, \{a\}, \{a\}\cup\{b\}, \{a\}\cup\{c\}, X\},$$

设点列 $\{x_n\}$ 为 $x_n=a$。于是，显然 $\{x_n\}\to a$，而点 b 的开邻域只有 $\{a\}\cup\{b\}$ 和 X，因为它们都含有 a，所以 $\{x_n\}\to b$。就是说，这个空间的点列收敛于两个点。这是由于空间 X 异常的缘故，所以下面的结论成立。

豪斯道夫空间的点列 $\{x_n\}$ 不会收敛于两点以上。

因而，在 n 维欧几里得空间中，也不会发生这种情况。

它的理由立刻就可知道。如果 $\{x_n\}$ 收敛于 a 和

$$b(a\neq b),$$

由于 $a\neq b$，所以根据豪斯道夫的假设，可取得不交的 a，b 各自的开邻域 U_a 和 U_b。就 U_a 来说，因为 $\{x_n\}\to a$，总存在 $n>n_0$，使得

$$x_n\in U_a,$$

因此，x_n 不会再含于 U_b。

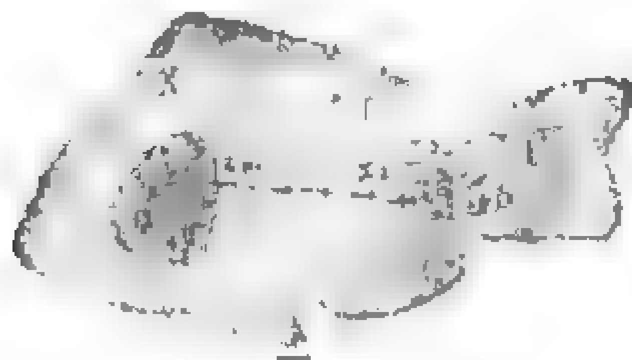


图 7-5

再详细一点说，在实数直线的情形，对于某集合 H 的聚点，存在由 H 的元素构成的收敛于 x 的互异的点列 $\{x_n\}$。但在一般的拓扑空间中，如果存在那样的点列，确实是收敛于聚点，而对任意的聚点，未必总能取得那样的点列。但是，下面的结论是成立的。

定理 当空间 X 是第一可数的 T_1-空间时，它的点 x 是 X

子集H的聚点的充分必要条件是，存在由H的相异点构成的收敛于x的点列。

因而可知，在R^n中，和实数直线R的情形是相同的。

顺便，让我们再介绍一个概念。

所谓空间X是**正则的**，是指关于任意闭集F和不含于它的任意点x，存在使$U_1 \supset F$，$U_2 \ni x$的分离的开集U_1和U_2。

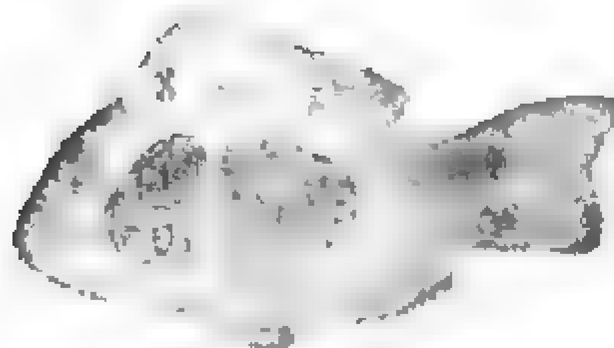


图 7-6

特别是，若X是度量空间，它必是正则的。

有了上述准备，可以证明下面的重要定理。

可度量化定理 在第二可数正则T_1-空间中，可确定一个度量，使得以它的开球邻域系为基的拓扑与已给空间的拓扑一致，且作成度量空间。

这个定理当然是说，一个拓扑空间具有什么条件的时候，才能成为度量空间。这在二十世纪二十年代的拓扑空间论中，应该说是最重大的成果。它是由苏联数学家乌利松（Урысон）和吉洪诺夫（Тихонов）证明的。

§2 子空间

若给定拓扑空间X的某子集K，用X的拓扑制造K的拓扑，则K本身可以看做拓扑空间。

设X是集合，K是它的子集，$\mathfrak{A}$是X的某子集族。这时，

用$\mathfrak{A}\cap K$来表示以$H\cap K$形状表示的K的子集族，这里，H是$\mathfrak{A}$的任意元素。也就是$\mathfrak{A}\cap K=\{H\cap K|\forall H\in\mathfrak{A}\}$。于是，根据有关拓扑基的定理，就可得到如下定理。

定理 设$\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{B}_2$是空间X的生成同一拓扑的基．若K是X的任意子集，则$\mathfrak{B}_1\cap K$，$\mathfrak{B}_2\cap K$都是K的拓扑基，它们生成同一拓扑。

因此，当$(X,\mathfrak{B})$是拓扑空间，K是X的任意子集时，就确定了拓扑空间$(K,\ \mathfrak{B}\cap K)$，把它叫做X的**子空间**，它的拓扑叫做**相对拓扑**。因为子空间的相对拓扑是空间X的拓扑和K的交集，所以若K是X的开集，则拓扑的元素是X的开集，但在一般的情况下不是开集。因此，当K的子集M是子空间K的开集时，就说M是在K中对X的相对开集．可是，由于这种说法很麻烦，所以通常是说，M是K中开集。在K中对X的闭集也是同样的。以后在本节中，当提及空间X的子集K时，总把K看做X的子空间。

例如，在n维欧几里得空间R^n中，若用ρ表示它的度量，就可确定象下面那样的子空间．

$(n-1)$维球面 $S^{n-1}=\{x|\rho(o,x)=r,\ r>0\text{的实数}\}$

n维球 $B^n=\{x|\rho(o,x)\leqslant r,\ r>0\text{的实数}\}$

n维开球 $OB^n=\{x|\rho(o,x)<r,\ r>0\text{的实数}\}$

(如果使用讨论距离空间时已用过的记号这就是$N_r(o)$)。

这些子空间，当$n=1$时，分别如下

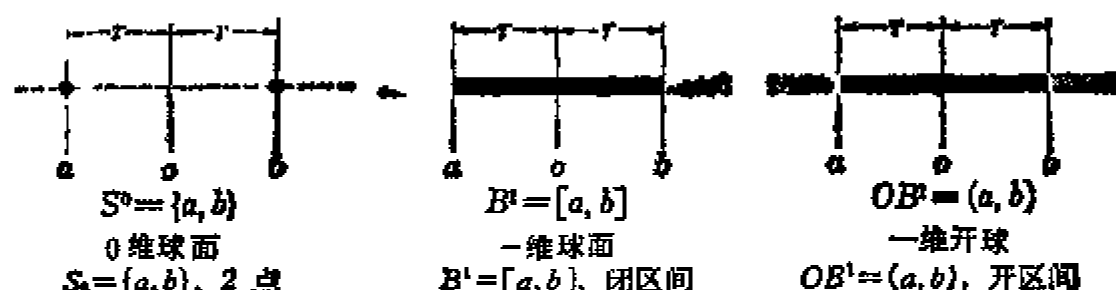


图 7-7

当 $n=2$ 时，象图 7-8 那样，若 $n=3$，象图 7-9 那样。

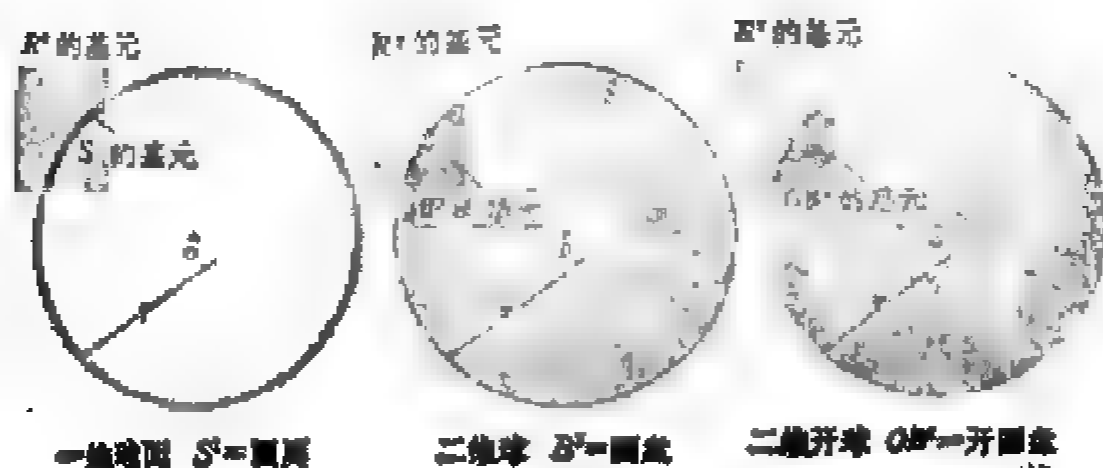


图 7-8

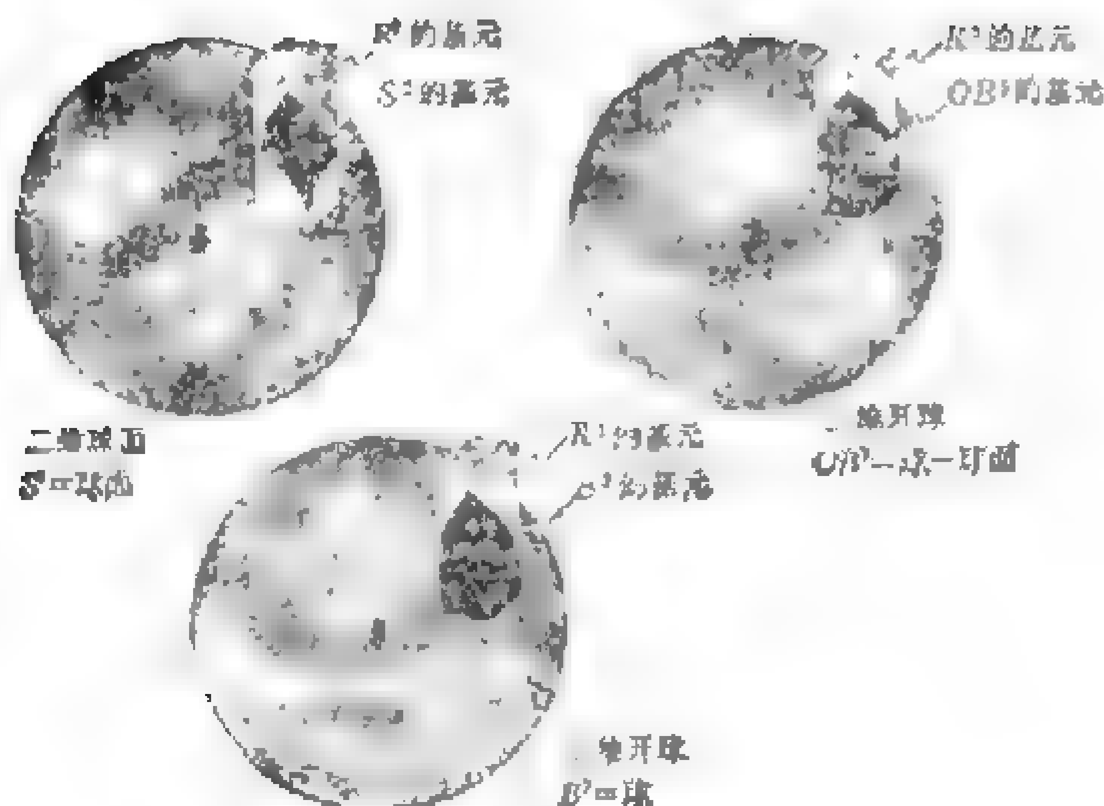


图 7-9

当 $n \geqslant 4$ 时，S^{n-1} 也好，B^n 也好，都不能通过例子用眼睛看得见的，但大体上是怎样的呢，可按 $n=1, 2, 3$ 依次想象

推测出来。在此，根据定义的式子也可立即知道，n 维球是由 n 维开球和 $(n-1)$ 维球面构成的。

$$n\text{ 维球}=n\text{ 维开球}\cup(n-1)\text{ 维球面}。$$

也就是

$$B^n=OB^n\cup S^{n-1}\text{ 且 }OB^n\cap S^{n-1}=\varnothing。$$

同样，n 维立方体 I^n 作为 R^n 的子空间，它本身也是拓扑空间。R^3 的环面是象图 7-10 那样的具有相对拓扑的子空间，而它本身也是拓扑空间。

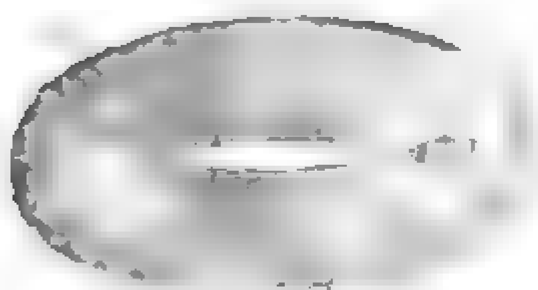


图 7-10

在这里，需要注意关于记号上的一个问题。R^n 是 n 个 R 的直积空间，但 S^2 不是 $S^1\times S^1$，而 $S^1\times S^1$ 是环面 T^2。一般来说，n 个圆周的拓扑积 $(S^1)^n$ 叫做 n 维环面，并常用 T^n 表示。当 $n\geqslant 2$ 时，在数学中，习惯上把 n 维球面写做 S^n，上指标 n 只是表示维数，绝没有 n 个 S^1 直积的意思。 这些记号的形成，并不是事先个个定好的，而是多年积累习惯了的。

下面，我们来讨论关于空间的连通性。

所谓空间 X 的子集 Y 是**连通的**，是指 Y 不是 Y 的两个非空不交的同时是开集或同时是闭集的子集 A，B 的并集。

也就是，分离为 A，B 两部分的空间不是连通的。

读者对这个定义会有点奥妙的感觉，但是我们将在接近欧几里得空间的较广的空间中更直观地加以叙述，所以请读者暂时稍加忍耐。于是，可证明：

若 $\{G_\alpha\}$ 是空间 X 的连通子集族，$\{G_\alpha\}$ 的任何两个元素都具有非空交集，则并集 $\bigcup_\alpha G_\alpha$ 是连通的。

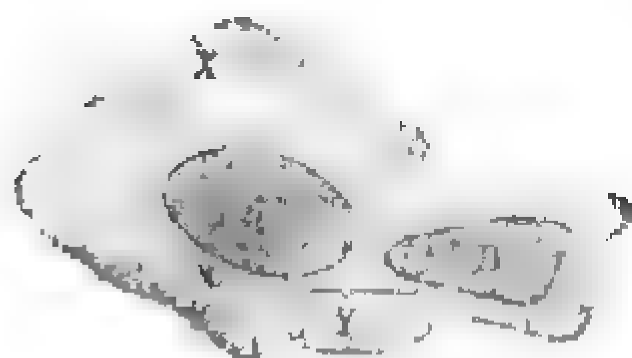


图 7-11

特别地，若设 $\{G_\alpha\}$ 为含有空间 X 的点 x 的所有连通的子集族，则因 $\{G_\alpha\}$ 的任何两个元素都含有 x，所以 $\bigcup_\alpha G_\alpha$ 本身是含有 x 的连通的子集，而且是含有 x 的最大的连通集。把它叫做含有点 x 的空间 X 的**连通分支**。也就是，所谓 X 是连通的，是指含有其各点的连通分支构成 X。

实数直线 R 是连通的。又，若 $\{X_\alpha\}$ 是连通的空间族，则拓扑积 $\Pi_\alpha X_\alpha$ 是连通空间。从而 n 维欧几里得空间 R^n 是连通的。还有，n 维球 B^n，n 维球面 S^n 也都是连通的，关于这些内容将在以后讨论。

§3 紧致性

在这里，我们来说明，在拓扑学中经常出现的紧致性概念。

集族 $\{U_\alpha\}$ 是集合 A 的**覆盖**或者说**覆盖** A，是指

$$A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

当集合 U_α 是开集时，集族 $\{U_\alpha\}$ 叫做 A 的**开覆盖**，或者说由开集作成的 A 的覆盖。当 A 的覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的子集族覆盖 A 时，它的子集族叫做 $\{U_\alpha\}$ 的**子覆盖**。特别是，当它的子族是由有限

个元素构成的时候，叫做**有限子覆盖**.

设 A 为空间 X 的某子集. 所谓 A 是**紧致的**，是指 A 的任意开覆盖必有有限子覆盖.

突然提出紧致性这种不易理解的概念，我想是使读者很为难的. 但是当我们考虑在微积分中数列的收敛时，若取闭区间 $[a,b]$ 作为 R 的子集 A，如所熟知，由 A 的点所成的数列 $\{x_n\}$ 必有子列收敛于 A 的某点 x.

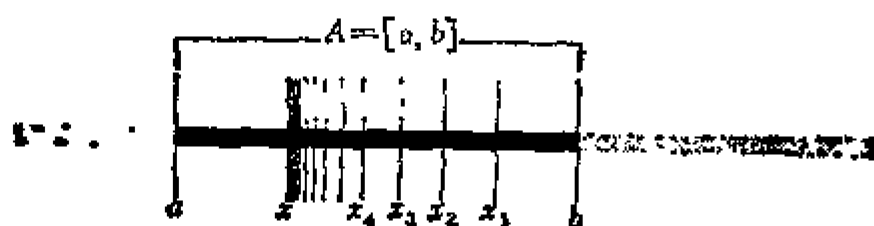


图 7-12

与此相反，若取开区间 (a, b) 作为 A，在 A 的数列中存在收敛于点 a（不是 A 的点）的数列，一般说来，A 的数列未必有子列收敛于 A 的点.

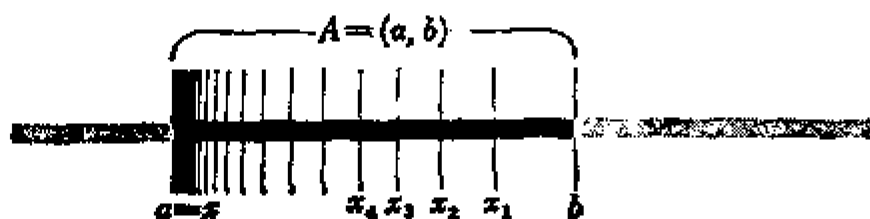


图 7-13

A 的数列总有子列收敛于 A 的点这种性质，实际上是 A 的紧致性质. 因此，$[a, b]$ 是紧致的，而 (a, b) 不是紧致的. 就是说，在 R 中，闭集是接近紧致集的.

其次，我们取 R 自身作为 R 的子集来考虑这个问题. 例如 $x_n = n$ 的数列 $\{x_n\}$，因为它如图 7 14 那样向着无限大方向前进，所以 $\{x_n\}$ 不收敛于 R 的点. 已知 R 是 R 的闭集. 因此，为使 A 的数列收敛于 A 的点，就在于 A 必须是有限范围的

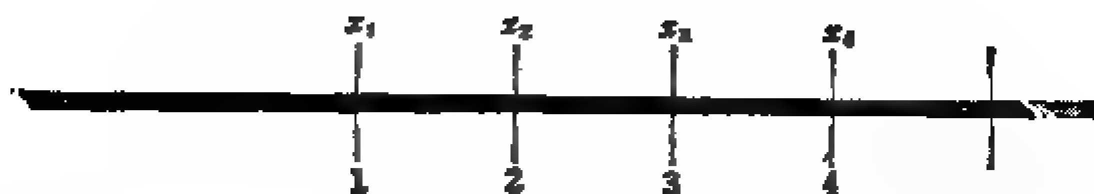


图 7-14

集合．今后把它叫做有界集合。就是说，在R中有界闭集是紧致集。

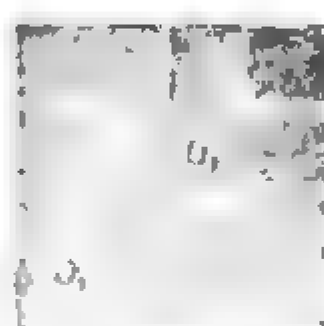
紧致空间具有如下性质。

所谓空间X的子集族$\{F_\alpha\}$具有**有限交性**，是指$\{F_\alpha\}$的(非空的)任何有限个元素的交集都不是空的。

定理　空间X是紧致的充分必要条件是，任意具有有限交性的X的闭集族$\{F_\alpha\}$，作为它的交集至少包含X的一个点，即$\bigcap_\alpha F_\alpha \ni x$成立。(就是说，$\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \varnothing$。)

这可从紧致性的定义应用补集而推出，虽然这只不过是换一种说法，但是从下面的例子可知它的重要性。





F_i是所有闭圆盘(紧致的)　$\bigcap F_i=\{a\}$

O_i是所有开圆盘(非紧致的)　$\bigcap O_i=\phi$

$\{F_i\}$和$\{O_i\}$都具有有限交

图 7-15

一般来说，可证明如下定理。

定理　紧致空间族$\{K_\mu | \mu\in M\}$的直积空间$\prod_\mu K_\mu$还是紧致空间。

因而，n维立方体I^n和希尔伯特立方体$I^{\aleph_0}$等，因为它

们是区间 $I=[0,1]$ 的直积空间，所以它们都是紧致空间．另外，下面的定理也是正确的．

定理　n 维欧几里得空间 R^n 的子空间 A 是紧致的充分必要条件是，A 是有界闭集．

在这里，所谓 A **是有界的**，就是 A 含于具有某充分大半径的 n 维球．

于是，由前述定理可知，S^{n-1}, B^n 以及 T^{n-1} 都是 R^n 的有界闭集，所以它们都是紧致空间．可是，由于 R^n 本身不是有界的，所以它不是紧致的．

在非 R^n 的一般空间中，紧致子空间 A 不一定是闭集．例如，在以三点构成的空间 X 中，已知 $\{a\}$ 不是闭集，但是 X 的开集只有有限个，所以可知，X 是紧致空间．可是由下面的定理指出，这只不过是特别情况．

定理　豪斯道夫空间的紧致集 A 是 X 的闭集．

设 y 为 $X-A$ 的任意一点，根据前述定理，如果能证明不含有 A 的点的 y 的邻域 V 存在即可．我们取 A 的任意点 x，因为 X 是豪斯道夫空间，所以可取得 x, y 的分离的开邻域 U_x, U_y．这样一来，因为 $A\subset\bigcup_{x\in A}U_x$，所以集族 $\{U_x\}$ 是 A 的开覆盖，又因 A 是紧致的，所以有子集族 $U_1, U_2, \cdots, U_n$，它们覆盖了 A．设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 分别是与 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 不相交的 y 的开邻域．如果设

$$V=\bigcap_{j=1}^{n}V_j,$$

则 V 是不含有 A 的点的 y 的开邻域，因此 A 是闭集．

但是下面的事实成立．

定理　紧致空间的闭子集是紧致空间．

n 维欧几里得空间 R^n，它本身不是紧致的．但是 R^n 的各点的邻域与紧致集 B^n 有相同的结构．因此，可把在第一

可数、第二可数中所讨论的概念局部化.

所谓空间 X 是局部紧致的，是指对于 X 的所有点 x 的任意开邻域 U，存在点 x 的满足 $V \subset U$ 而 V 又是紧致的开邻域 V.

若这样定义，就可以说，n 维欧几里得空间 R^n 是局部紧致空间.

§4 贝尔定理

根据可度量化定理，度量空间是一般拓扑空间的一个重要类型. 因此，现在就这个定理中涉及的度量拓扑空间还要谈几句，虽然它在开始讨论度量空间时谈过，但是在此谈及它是为以后作准备.

设 X 是度量空间，它的度量用 ρ 表示. 当 A 是 X 的任意子集时，如下定义的 $d(A)$ 叫做 A 的**直径**，若 $A=\varnothing$，则 $d(A)=0$，若 $A \neq \varnothing$，而对 A 的任意两点 x，y 使

$$\rho(x, y) \leqslant \alpha$$

的 α 存在时，即 $\rho(x, y)$ 是有界的，这时 $\rho(x, y)$ 的上确界记做 $d(A)$. 当 A 不是有界的时候，记做 $d(A)=\infty$，这时直径不能确定.

于是，可以证明 $d(A)=0$ 的充分必要条件是，A 最多是由一个点构成的. 若 $A \subset B$，则 $d(A) \leqslant d(B)$ 以及 $d(\bar{A})=d(A)$. 特别是，若 A 是紧致的，又因 X 是豪斯道夫的，所以它是闭集，因而 A 是有界的，就是说 $d(A)$ 恰好等于某个常数. 若恰有 $\rho(x, y)=d(A)$，则在集合 A 能够取到使等式成立的 A 的两点 x 和 y. 若 A 不是紧致的，那么不一定具有这个性质.

例如，若考虑 R^2 的半径为 1 的开圆盘 OB^2，则 $d(OB^2)=2$. 若考虑半径为 1 的圆盘 B^2，则 $d(B^2)=2$. B^2 的情况象图

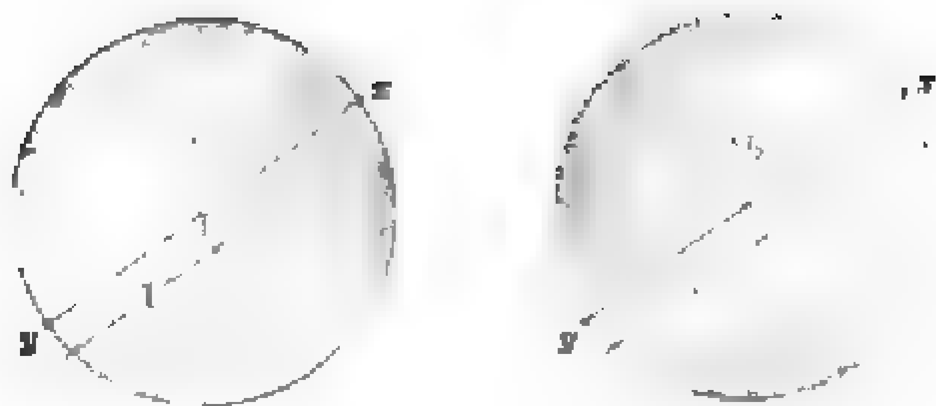


图 7-16

那样，能够取到使 $\rho(x, y) = 2$ 的点，但是如果是 OB^2，则常有 $\rho(x, y) < 2$。

当 A，B 是度量空间 X 的子集时，A 和 B 之间的距离 $d(A, B)$ 如下确定．当 A 或 B 是 $\varnothing$ 时，$d(A, B) = 0$．当 A，B 都不是 $\varnothing$ 时，关于 A 的任意点 x 和 B 的任意点 y，$\rho(x, y)$ 的下确界作为 $d(A, B)$．（注意，$\{\rho(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 在 R 中下界为 0。）于是，关于两个集合之间的距离有下列事实成立。

对于 X 的点 x，$d(x, A) = 0$ 的充分必要条件是 $x \in \overline{A}$。若 A，B 是非空分离的紧致集，则 $d(A, B) > 0$．这时存在 A 的点 x 和 B 的点 y，使 $d(A, B) = \rho(x, y)$。

在这里紧致集起着重要的作用，如果紧致性代之以闭集就不成．例如，设 $X = R - [2, 3]$，在 X 取数列

$$A = \left\{2 - \frac{1}{n}\right\}, B = \left\{3 + \frac{1}{n}\right\}.$$

因为 X 是 $R - [2, 3]$，所以 A，B 在 X 中是闭集．这从图 17 立即就可看出 $d(A, B) = 1$．但是，对于 A 的任意点 x 和 B 的任意点 y，总有 $\rho(x, y) > 1$。

现在我们来介绍，关于度量空间 X 的点列的最重要的概念．X 的点列 $\{x_n\}$ 是柯西 (Cauchy) 点列或基本点列，是指对

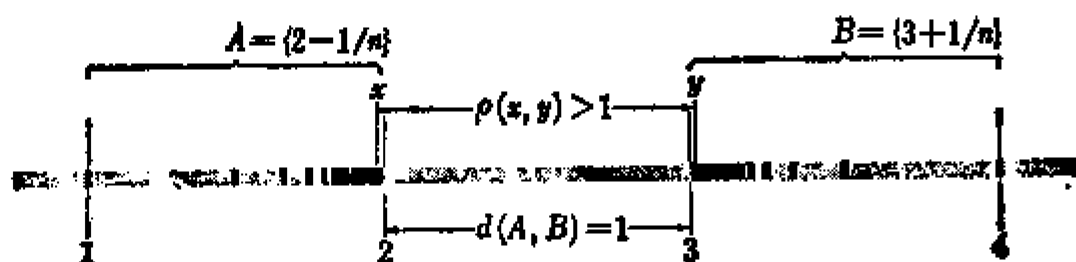


图 7-17

于任意的实数 $\varepsilon>0$，能够确定自然数 n_0，对于 $h, k>n_0$ 的所有整数 h, k

$$\rho(x_h, x_k)<\varepsilon$$

常成立．就是说，满足条件的那些项都是非常靠近的．显然，点列 $\{x_n\}$ 如果收敛于点 x，根据收敛的定义，则 $\{x_n\}$ 是柯西点列．在一般的度量空间中其逆不成立．但在实数直线这种特殊情况下，其逆是成立的．也就是，R 的任意柯西点列是收敛的．一般来说，对于度量空间 X，当它的任意柯西点列都收敛于 X 的点时，X 叫做**完备的**．

n 维欧几里得空间，根据它度量的构造（或根据拓扑的导入）可以看做完备空间．

到此，就可以阐述我们所要得到的结果．

贝尔（Baire）定理　若 X 是完备的度量空间或是局部紧致的正则空间，则在 X 稠密的可数个开子集的交集在 X 仍为稠密的．

这个定理是在拓扑学的应用中有着重要作用的基本成果．

第八章 拓　　扑

§1 连续映射

关于连续函数 $f:M\to R$，即从实数直线的集合 M 到实数直线的映射的连续性，我们在第五章中已经讨论过了。也就是，在第五章中定理 5 所说的内容，如：

f 在 M 的点 x 连续的充分必要条件是，对于含有 $f(x)$ 的 R 的任意开集 U，能够确定 x 在 R 中的开邻域 V，使

$$f(V\cap M)\subset U$$

成立。

在此，如果设 M 是 R 的子空间，则因 $V\cap M$ 是空间 M 的开集，所以一般地可以如下确定在任意拓扑空间中的连续性。

设 X，Y 是空间，$f:X\to Y$ 是映射。所谓 f 在 X 的 x 点**连续**，是指对于 $x\in f^{-1}(U)$ 的 Y 的任意开集 U，能够取得 X 的开集 V，使

$$x\in V\subset f^{-1}(U)$$

成立。

如果 X，Y 是空间，而 $f:X\to Y$ 是映射，A 是 X 的子集，当在 A 的任意点 x，f 连续时，则 f 叫做**在 A 连续**。特别是，当不致引起混淆时，有时也把"在 A 连续"简单地叫做"连续"。

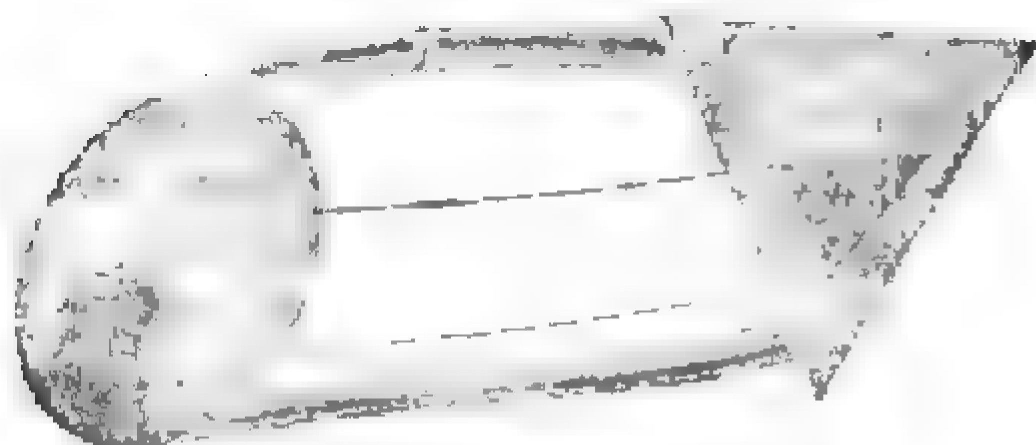
特别是，当 X 的子集 A 是 X 本身时，还可用更简明的形式叙述，如：

定理 设 X，Y 是空间，而 $f:X\to Y$ 是映射，则 f（在 X）连续的充分必要条件是，对于 Y 的任意开集 U，$f^{-1}(U)$ 是 X 的开集。

由于 f 在 $f^{-1}(U)$ 的点 x 连续，所以关于 $V_x \subset f^{-1}(U)$ 的所有点 x，能够取得 x 的开邻域 V_x，使 $V_x \subset f^{-1}(U)$。因为 $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$，所以根据拓扑空间的公理 4，$f^{-1}(U)$ 是开集。

反之，假定满足定理的条件。设 x 是 X 的任意点，U 是含有 $f(x)$ 的 Y 的任意开集。若令 $V = f^{-1}(U)$，则根据定理的条件 V 是 X 的开集，又因 $x \in V \subset f^{-1}(U)$，所以 f 在 x 连续。因为 x 是 X 的任意点，所以 f 在 X 连续。

因为读者对于拓扑空间的一些想法，已经十分熟悉，所以我想没有必要再用文氏图来表现，但出于一片婆心，如下表示还是有益的。需要注意的是，对于映射 $f: X \to Y$ 的箭头来说，当 $U \subset Y$ 时，则 $f^{-1}(U) \subset X$ 是反向的。



▼开集合 $U \supset Y$，$f^{-1}(U) \supset X$ 开集合

图 8-1

在拓扑空间中，我们已知所考虑的连续映射都可以用开集简明地加以表示。这一结果，确切地证实了开集的概念是拓扑学的精髓。显然就这种意义来说也适用于连续函数，所以概念的一般化对于概念的简明化也是有用的。

根据 f 空间的定义，立即可知有如下结果。

定理 设 X，Y 是空间，K 是 X 的子集，如果映射 $g:K\to Y$ 是连续映射 $f:X\to Y$ 的限制映射，则 $g:K\to Y$ 也是连续映射．

根据前述定理立即可知，下面的定理也是正确的．

定理 设 X，Y，Z 是空间，若 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 是连续映射，则复合映射 $h=gf:X\to Z$ 是连续映射．

设 $f:X\to Y$ 是连续映射，而 F 是 Y 的任意闭集． 由于 $Y-F$ 是开集，所以 $f^{-1}(Y-F)$ 是 X 的开集．因此，

$$X-f^{-1}(Y-F)$$

是 X 的闭集． 可是，因为 $X-f^{-1}(Y-F)=f^{-1}(F)$（参照图 2），所以可得到如下结果．

定理 映射 $f:X\to Y$ 是连续的充分必要条件是，对于 Y 的任意闭集 F，$f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集．



图 8-2

若用闭包来说，可叙述如下．

定理 映射 $f:X\to Y$ 是连续的充分必要条件是，对于 X 的任意子集 A，则有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$．

当考虑这一结果和第七章中关于点列收敛的定理以及映射的连续性之间的关系时，可得如下结果．

定理 设 X 是第一可数的豪斯道夫空间，这时，映射

$$f:X\to Y$$

是连续的充分必要条件是，关于X的任意点x，若取收敛于x的X的任意点列$\{x_n\}$，则$\{f(x_n)\}$收敛于$f(x)$。

如果我们回想，这个定理是相当于第五章中的定理1的。那时，经历了很长的过程之后（虽然尚未最终达到预期的目的）我们才把实数直线的几何直观导入了集合。从这个定理可以某种程度地看出，实数直线以及一般地n维欧几里得空间在一般拓扑空间中，具有怎样的位置。因此可知，我们为什么舍弃了点列收敛的概念，而采用了开集族即拓扑这种概念。

另外，在第六章中研究拓扑积$\Pi_\mu X_\mu$时，我们已经规定以$p_\mu(x)=x(\mu)\in X$作为它向μ坐标的射影$p_\mu:\Pi_\mu X_\mu\to X_\mu$。这个积在有限个的时候，显然是没有什么问题的，但是当μ的指标是无限集的时候，之所以向$\Pi_\mu X_\mu$导入弱拓扑，实际上正是因为得到如下结果。

定理 拓扑积$\Pi_\mu X_\mu$向μ坐标的射影$p_\mu:\Pi_\mu X_\mu\to X_\mu$是连续映射。也就是，若把比弱拓扑小的（即弱拓扑的真子族）拓扑用于$\Pi_\mu X_\mu$，则p_μ未必是连续的。

因为豪斯道夫空间的任意拓扑积是豪斯道夫空间，可数个第一可数空间的拓扑积是第一可数的，所以可得到如下结果。

定理 可数个第一可数豪斯道夫空间的拓扑积$\Pi_m X_m$的点列$\{x_n\}$收敛于x的充分必要条件是，在各坐标空间X_m中点列$\{p_m(x_n\}$收敛于$p_m(x)$。

这个结果再一次指出，为什么以弱拓扑作为拓扑积的拓扑。

若使用连续映射，则在第七章中所讨论的空间的连通性可叙述如下。

定理 空间X是连通的充分必要条件是，不存在使$f(X)$恰为两点的连续映射$f:X\to R$。

对于这个结果，若考虑非连通的情形，更易于直观地理解. 假定存在象图8-3那样的连续映射 $f:X\to R$，而 $f(X)=\{a\}\cup\{b\}$. $\{a\}$,$\{b\}$ 都是在 R 的子空间 $\{a\}\cup\{b\}$ 的闭集，而在它们自身中又都是开集. 因此，若设 $f^{-1}(a)=A$, $f^{-1}(b)=B$，则 A, B 同时是 X 的闭集又是开集. 总之，因为 $f(A)=\{a\}$, $f(B)=\{b\}$，所以 A, B 都不是空集. 又因

$$X=f^{-1}(\{a\}\cup\{b\})=f^{-1}(a)\cup f^{-1}(b)=A\cup B,$$

所以 X 不是连通的.

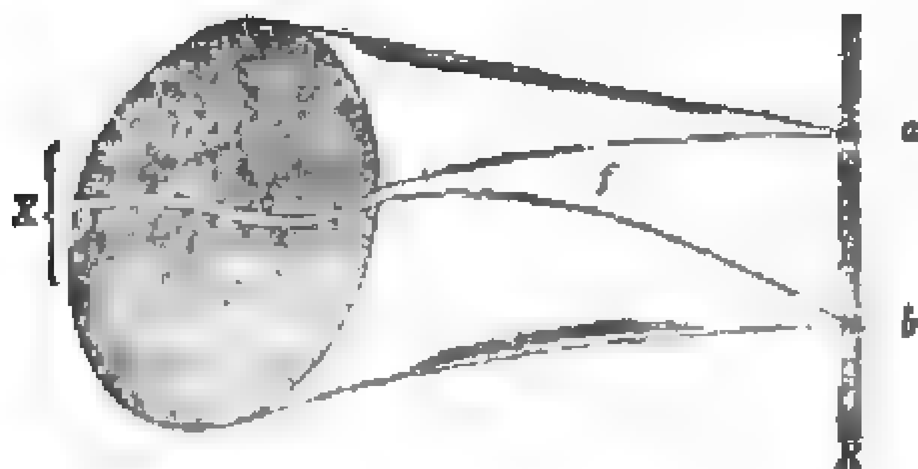


图 8-3

如果应用这个定理，那么立即可以得出如下结果.

定理 当 X, Y 是空间，$f:X\to Y$ 是连续映射时，若 X 是连通的，则 $f(X)$ 也是连通的.

若 $f(X)$ 不是连通的，则因存在连续映射 $g:f(X)\to\{a\}\cup\{b\}\subset R$，所以可得出复合映射 $gf:X\to\{a\}\cup\{b\}\subset R$，这与 X 是连通的相矛盾.

在此，我们再导入一个关于空间的连通性质.

所谓拓扑空间 X 的两点 a 和 b 是**道路连通的**，是指存在使线段 $[0,1]$ 映为 $f(0)=a$, $f(1)=b$ 的连续映射 $f:[0,1]\to X$.

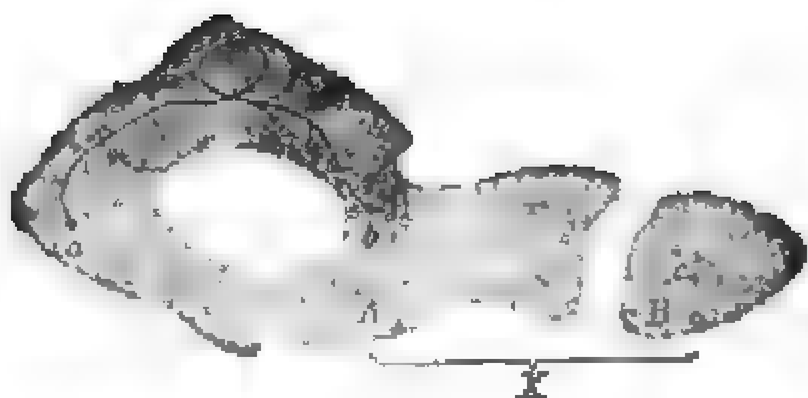


图 8-4

一般地，把连续映射 $f:[0, 1]\to X$ 叫做 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的**连结道路**．例如图 8-4，a 和 b 是道路连通的，而 a 和 c，b 和 c 不是道路连通的。

X 的两点间的所谓"道路连通"的关系，如我们立刻就可知道的那样，它是一种等价关系，X 可划分为这种等价关系的等价类。

特别是，只有一个等价类的空间 X 叫做**弧状连通的**．图 8-4 中的空间 A 以及 B 都是弧状连通的，但是把它们合起来的 X 就不是弧状连通的．这种弧状连通性和前边所说的连通性是不一致的．若稍微详细一点只说结果，就是：

弧状连通的空间 X 是连通的，但是一般来说，其逆是不成立的。

若完备度量空间 X 是连通的，而且是局部连通的，则 X 是弧状连通的。

这里所说的**局部连通**，与第一可数、第二可数的讨论情况是类似的，是把连通概念局部化。所谓 X 是局部连通的，是指对于 X 的各点 X 的任意开邻域 U，存在使 $V\subset U$ 的连通的 x 的开邻域 V。

以后，在本书中，大体上仅以弧状连通空间作为对象，所以尽管**没有事先假定弧状连通性，我们还是认为空间是弧状**

连通的.

还有如下结果也是立即可知的.

定理 设 X, Y 是空间,而 $f: X \to Y$ 是连续映射. 这时,若 X 是紧致的,则 $f(X)$ 也是紧致的.

因为,对于 $f(X)$ 任意给定的开覆盖 $\{G_\alpha\}$, $\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ 是 X 的开覆盖,所以由 X 是紧致的可取它的有限子覆盖

$$\{f^{-1}(G_1), \cdots, f^{-1}(G_n)\},$$

而 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 就是所求的 $f(X)$ 的开覆盖.

§2 函数空间

当 X, Y 是任意集合时,我们在第四章中确定了直积 X^Y, 实际上, 我们已经说过, 所谓直积可以看做映射 $f: Y \to X$ 的集合. 若 X 和 Y 是拓扑空间,我们不考虑映射,而考虑所有连续映射 $f: Y \to X$ 的集合 F. 对这个集合 F, 用某种方法(根据不同情形有各种方法)导入拓扑, 当 F 本身是拓扑空间时, 按照传统把这个拓扑空间叫做从 Y 到 X 的连续映射构成的**函数空间**. 现在,我们来讨论关于 F 的拓扑的例子.

一般地, 因为映射不总是连续映射, 所以集合 F 是直积 X^Y 的子集. (F 是什么样的子集, 这要根据 X 和 Y 的拓扑而定.)可是, 因为 X, Y 都是拓扑空间, 所以象我们在第五章中所说的那样, 由 X 的拓扑基可确定直积 X^Y 的拓扑(弱拓扑), 而 X^Y 本身构成了拓扑空间. 由此,因为连续映射的集合 F 是 X^Y 的子集,所以根据 X^Y 的拓扑在 F 限制下的相对拓扑, F 本身是拓扑空间. 这样一来, 导入拓扑的函数空间 F 叫做**列紧拓扑**. 这个名字的由来, 是因为分析学中常用 F 的这个拓扑,而且与下面的定理有关系: "连续映射列 $\{f_n\}$ 在 F 下收敛于连续映射 g 的充分必要条件是, 对于 Y 的任意点 y 所确定的 X 的点列 $\{f_n(y)\}$ 收敛于 $g(y)$."

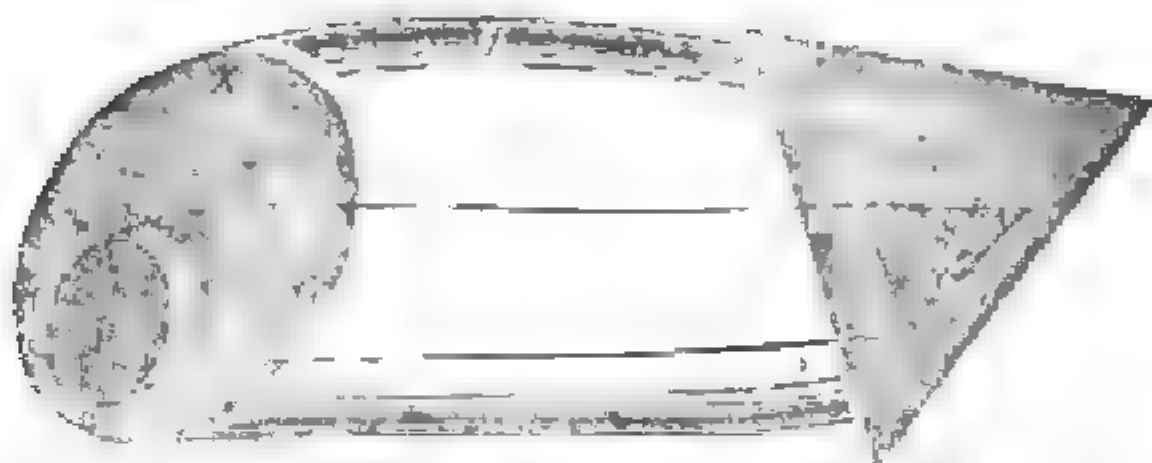
F 还有一个有名的拓扑，那就是**紧致开拓扑**。这种拓扑是如下构成的：首先选出 Y 的任意紧致集合 K 和 X 的任意开集 U，把 K 映入 U 的连续映射 $f: Y \to X$ 全体的集合用 $W(K, U)$ 表示。即

$$W(K, U) = \{f | f(K) \subset U, f \in F\}.$$

$W(K, U)$ 显然是 F 的子集，而且根据选出的各种 K 和 U，能够得到 X 的子族 $\{W(K, U)\}$。 F 的紧致开拓扑就是以族 $\{W(K, U)\}$ 为拓扑基所生成的拓扑。这种紧致开拓扑作为集族要比点收敛拓扑大(作为集族来说，前者包含后者)，在这种意义下，有时会带来各种方便。

其次，我们来定义类似于连续性的概念。当 X 和 Y 是空间时，映射 $f: X \to Y$ 是**闭映射**(或**开映射**)，是指 X 的所有闭集(或开集)的象在 Y 是闭集(或开集)。

在关于连续的定理中，我们提出过一个需注意的问题，即 $X \to Y$ 的箭头和 $f^{-1}(U) \subset X (U \subset Y)$ 是相反的。但是对闭映射(开映射)来说，$X \to Y$ 的箭头和闭集 $\subset X \to$ 闭集 $\subset Y$ (或开集 $\subset X \to$ 开集 $\subset Y$) 是一致的，满足这样条件的映射与连续性是没有关系的。



∀闭集合 $F \subset X$, $f(F) \subset Y$ 闭集合　(∀开集合 $U \subset X$, $f(U) \subset Y$ 开集合)

图 8-5

例如我们取拓扑空间 $X=\{a, b, c\}$ 作为例子。这时，拓扑 $\mathfrak{T}_X=\{X, \{a\}, \{a\}\cup\{b\}, \{a\}\cup\{c\}, \varnothing\}$. 另外，在 $Y=\{d, e, f\}$ 中，设它的拓扑为 $\mathfrak{T}_Y=\{Y, \{d\}, \{e\}\cup\{f\}, \varnothing\}$. 于是 Y 也是拓扑空间.

已知映射 $f:X\to Y$，对于所有的 $x\in X$，若规定 $f(x)=e$，则 e 的开邻域是 $\{e\}\cup\{f\}$，而在 X 因

$$f^{-1}(\{e\}\cup\{f\})=f^{-1}(Y)=X,$$

所以映射 f 是连续的。因为 $(\{b\}\cup\{c\})$ 是 $X-\{a\}$，所以它是 X 的闭集。但是 $f(\{b\}\cup\{c\})=\{e\}$，而 $\{e\}$ 不是 Y 的闭集，所以 f 不是闭映射。又，$\{a\}$ 是 X 的开集，但

$$f(\{a\})=\{e\},$$

而 $\{e\}$ 也不是 Y 的开集，所以 f 也不是开映射。其次，考虑映射 $g:Y\to X$，对于 Y 的任意元素 x，若规定 $g(x)=a$，则映射 g 是开映射，而不是闭映射。再考虑映射 $h:Y\to X$，对于 Y 的任意元素 x，若规定 $h(x)=c$，则 h 是闭映射，而不是开映射。(g 和 h 是连续映射.)

这些例子，虽然都是在非常特别的空间中讨论的，但是它确切地提供了证据，证明连续映射、闭映射以及开映射是互相独立的概念.

假定已给映射 $f:X\to Y$. 这里的 X 只是集合而没有确定拓扑，但 Y 是拓扑空间. 这时，我们考虑，作为 X 的拓扑，选择什么样的才能使 f 成为连续映射呢. f 是连续的充分必要条件，显然是对于 Y 的任意开集 V，如果 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集即可. 也就是，为了使 f 是连续的，X 的拓扑最低限度必须含有集族 $\{f^{-1}(V)|\forall$ 开集 $V\subset Y\}$. 因为 X 的离散拓扑 2^X 显然含有这样的集族，所以 X 的离散拓扑能使 f 成为连续映射. 但是，象以前说过的那样，离散拓扑如同不考虑拓扑是一样的，所以这是没有多大意义的结果.

在前边，我们考察过积空间 $\Pi_\mu X_\mu$，那时的弱拓扑是某 X_μ 的开集 U_μ。当设 μ 坐标射影为 $p_\mu:\Pi_\mu X_\mu\to X_\mu$ 时，则有 $p_\mu^{-1}(U_\mu)\subset\Pi_\mu X_\mu$。以集族 $\{p_\mu^{-1}(U_\mu)|\forall\mu\in M,\forall$ 开集 $U_\mu\subset X_\mu\}$ 的有限个集族的交集为基的拓扑，是 $\Pi_\mu X_\mu$ 上的拓扑，根据定义，各 μ 坐标射影 $p_\mu:\Pi_\mu X_\mu\to X_\mu$ 在这个弱拓扑上是连续映射。

而且，由 $\Pi_\mu X_\mu$ 的(弱)拓扑的作法可知 p_μ 是开映射。但是在此必须注意的是，p_μ 一般地不是闭映射。例如在 R^2，$P=\{(x,y)|xy=1\}$ 的子集是闭集，但是 $p_1(P)=R-\{0\}$，而它是第一坐标空间 R 的开集。

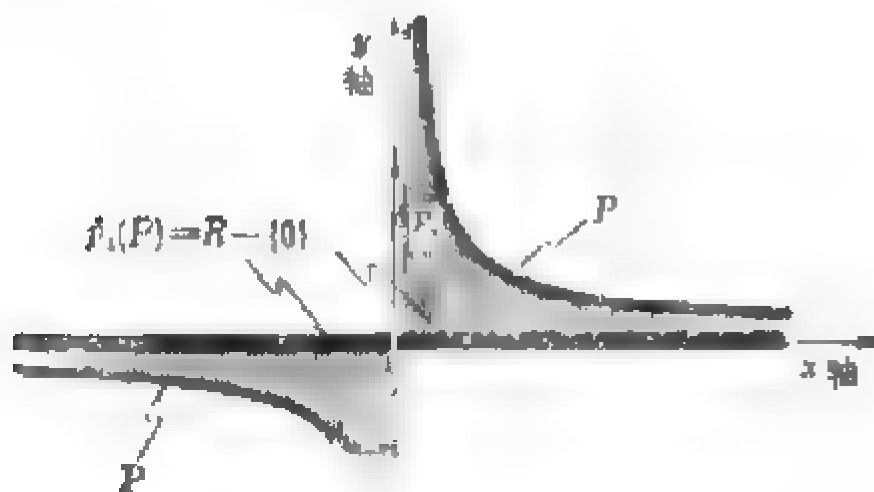


图 8-6

§3 商空间

我们对于积空间做了上述解释，就可以研究它的相反概念所谓商空间。这个概念在我们具体地研究拓扑空间时，它是非常有用的一种方法。设已给映射 $f:X\to Y$。但这次假定 X 是空间，而 Y 只是集合。

这时的问题是，为使 f 成为连续映射，Y 具有什么样的拓扑才行。这个问题的充分必要条件显然是，使得 $f^{-1}(U)$ 是 X

的开集的Y的子集U是Y的开集．让我们把这样的集族设为$\mathfrak{A}$．于是，因为$X = f^{-1}(Y)$，$\phi = f^{-1}(\phi)$，所以满足公理1，2是明显的．若$\{U_\mu\}$是$\mathfrak{A}$的子集族，则

$$f^{-1}(\bigcup_\mu U_\mu) = \bigcup_\mu f^{-1}(U_\mu)$$

（参照第二章）而因$f^{-1}(U_\mu)$是X的开集，所以它们的并$\bigcup_\mu f^{-1}(U_\mu)$是开集．因此，$f^{-1}(\bigcup_\mu U_\mu)$是开集，而有$\bigcup_\mu U_\mu \in \mathfrak{A}$，满足公理4．同样，也满足公理3，5，因而$(Y, \mathfrak{A})$是拓扑空间．这样得到的由$X$和$f: X \to Y$确定的Y的拓扑叫做**商拓扑**．由定义，Y的子集B为闭集的充分必要条件是，

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

是X的开集．商拓扑具有以下性质．

设映射$f: X \to Y$是空间X到空间Y的连续满映射，但Y具有商拓扑．当Z为空间时，映射$g: Y \to Z$为连续的充分必要条件是复合映射$gf: X \to Z$是连续映射．

以上是关于商拓扑的定义和性质的讨论，现在我们研究它的应用．假定给了集合X的某一剖分（参照第四章）$\mathfrak{P}$．这时映射$p: X \to \mathfrak{P}$，对于X的任意一点x，$p(x)$就确定了剖分$\mathfrak{P}$的含有x的区域$[x]$，这个映射p叫做**商映射**．

特别是，当X是拓扑空间时，对于剖分$\mathfrak{P}$，导入由X和p



图 8-7

所确定的商拓扑 $\mathfrak{A}$,就得出拓扑空间 $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A})$ 叫做剖分 $\mathfrak{P}$ 的**商空间**。

如在第四章中所谈的那样,若给 X 剖分 $\mathfrak{P}$,则在 X 中它的等价类的集合可看做由 $\mathfrak{P}$ 而得的等价关系 $\equiv$。因此 $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A})$ 可代之以等价关系 $\equiv$,从这点来说,商空间有时也用 $X/\equiv$ 表示。根据定义,对于商空间来说,下述事实成立。

若 $p: X \to X/\equiv$ 是空间 X 到商空间 $X/\equiv$ 的商映射,则 p 是连续映射。

这个结果,以后常常用于如下模型。设有拓扑空间 X, A 和 B 是 X 的子集(不限于 $A \cap B = \varnothing$)。并且已给双射

$$h: A \to B.$$

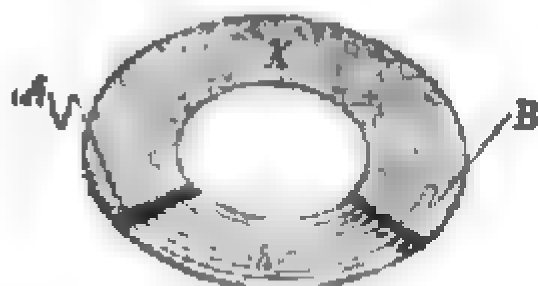


图 8-8

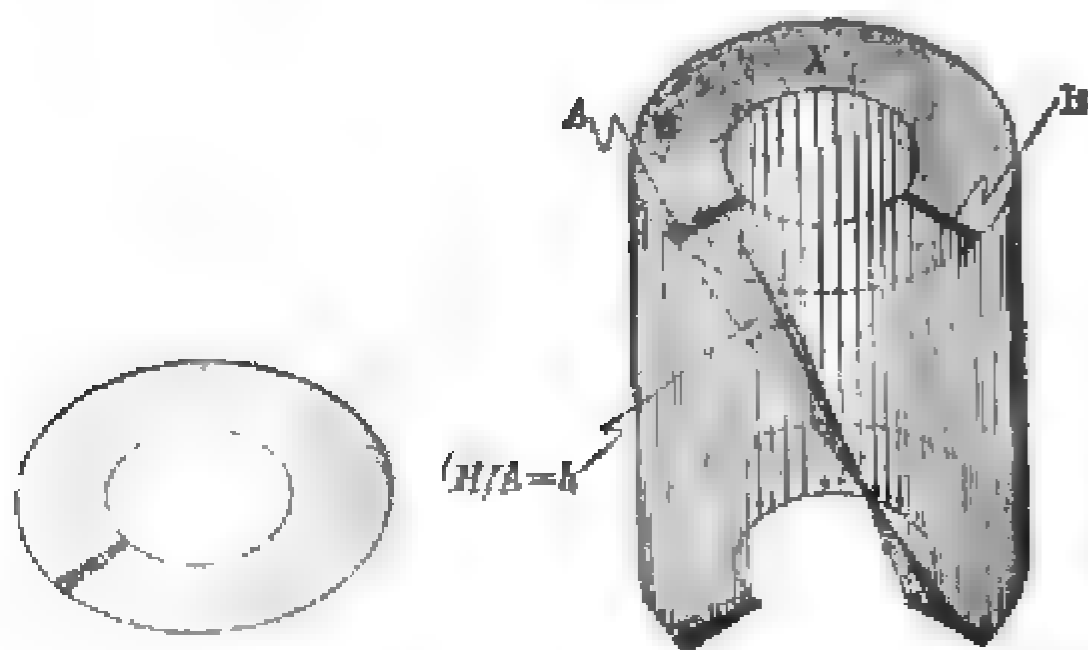


图 8-9

首先，以

$$若\ x\in A，则\ H(x)=h(x),$$
$$若\ x\bar{\in}A，则\ H(x)=x$$

来定义 $H:X\to X$. 而且，X的关系$\equiv$，即所谓 $x\equiv y$，由 $H(x)=H(y)$ 来确定. 于是，很明显由等价关系$\equiv$确定了商空间 $X/\equiv$和商映射 $p:X\to X/\equiv$. 这样得到的商空间 $X/\equiv$也可以说是在 h 之下，把 A 和 B 同样看待所得到的商空间. 直观地来看，商空间是表示在 h 之下把 A，B 的对应点贴合起来所得到的空间(通常是以下述的同胚作为 h).

§4 同胚

让我们来讨论拓扑学的最重要的概念同胚.

设 X 和 Y 是拓扑空间. 所谓 X 和 Y **同胚**(homeomorphic)，是指存在把 X 映到 Y 上的一对一的连续开映射 (= 连续开映射的双射). 而且用记号 $X\cong Y$ 表示. 这种映射叫做**拓扑映射**或**同胚**. "homeomorphic" 一词是希腊语的"同一样式"或"相同结构"的意思.

现在说明关于同胚的两个注意.

首先，若 $f:X\to Y$ 同胚，则 f 是双射而且是连续开映射. 当设 F 为 X 的任意闭集时，则 $X-F$ 是 X 的开集. 由此，因为 f 是开映射，所以 $f(X-F)$ 是 Y 的开集. 可是，因为 f 是双射(一对一到上的映射)，所以

$$f(X-F)=f(X)-f(F)=Y-f(F)$$

又因 $Y-f(F)$ 是 Y 的开集，所以 $f(F)$ 是 Y 的闭集. 也就是说，因为 f 把 X 的闭集映为 Y 的闭集，所以 f 还是闭映射. 这一推理方法是说，若 f 是双射且为开映射，它也必为闭映射，同理可证，若 f 是双射且为闭映射，它也必为开映射. 因此，当映射 $f:X\to Y$ 同胚时，也可以说 f 是双射而且连续，同时



图 8-10

还是闭映射。

其次，若映射 $f: X \to Y$ 同胚，由于 f 是双射，所以就可确定它的逆映射 $f^{-1}: Y \to X$。因为 f 是开映射，所以 X 的任意开集 U 的象 $f(U)$ 是 Y 的开集。由于 f 是双射，所以 f 的逆映射的逆映射是 f 本身，即 $(f^{-1})^{-1} = f$。因此就 f^{-1} 来说，对于 X 的任意开集 U，$(f^{-1})^{-1}(U)$ 是 Y 的开集，根据定理，映射 $f^{-1}: Y \to X$ 是连续的。因此，所谓 f 同胚，可换成另一种说法，即 f 是双射而且连续，同时它的逆映射 f^{-1} 也连续。

现在，我们来讨论一些例子。在 n 维欧几里得空间中，半径为 r 的 n 维球 B^n 是由 $B^n = \{x \mid \rho(o, x) \leqslant r,\ r > 0$ 的实数$\}$定义的。因为 r 是大于 0 的任意实数，所以根据 r 值的不同会得到很多不同的球。现在，任取 r 的两个值 $r_1 > r_2 > 0$，由它们确定的 2 维球＝圆盘用 B_1^2，B_2^2 表示。而且象图 8-11 那样，对于 B_1^2 的任意点 x 与点 o 联结的半直线和 B_1^2 的边界圆周 S_1^1 的交点 p 就被确定。显然，这条半直线也和 B_2^2 的周界交于一点 q。因此，对于已知点 x，应用线段长度的比，B_2^2 的点 $f(x)$ 由

$$op : ox = oq : of(x)$$

在线段 oq 上也被确定。这种作法对于点 $x \in B_1^2$，只要它不是

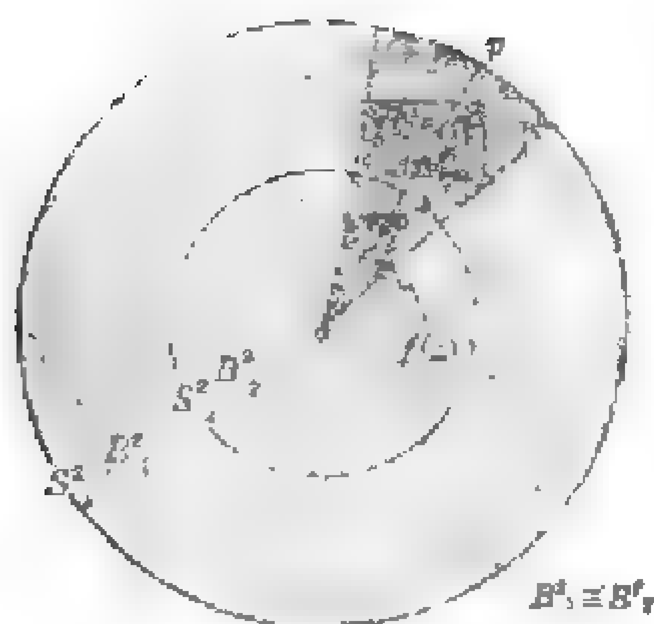


图 8-11

o点总是可能的。显然，当 $x=p$ 时，根据上边的比，可得 $f(x)=y$。因此，若规定 $f(o)=o$，则得到映射 $f: B_1^2 \to B_2^2$。不难知道，这个映射 f 是双射。所谓 f 是连续的，是指若图 8-11 中的开矩形 V 是 $f(x)$ 的邻域，则它的逆象是图中含有点 x 的开矩形 U。也就是，因为 $f^{-1}(V)=U$，所以 f 是连续的。如果把上述作法反过来，则有 $f(U)=V$，即把 B_1^2 的开集映为 B_2^2 的开集，就是说 f 是开映射。因此，f 是同胚映射，从而 B_1^2 和 B_2^2 同胚。



图 8-12

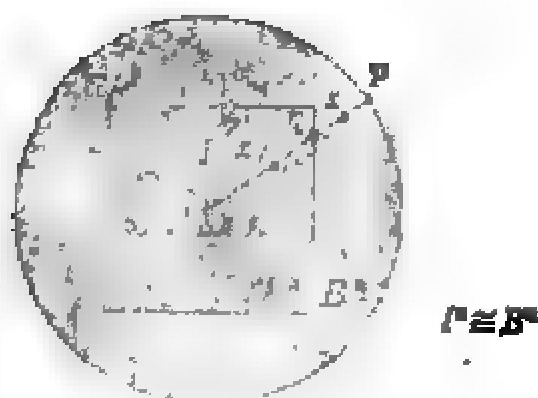


图 8-13

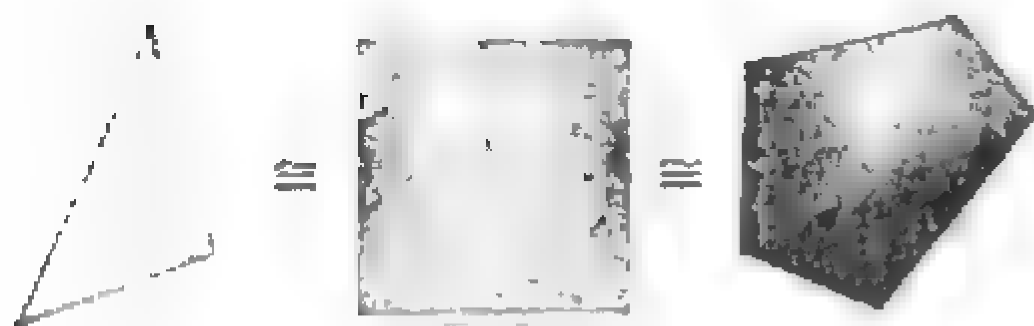


图 8-14

因为上述讨论对于任何半径的 n 维球 B^n 总是可行的，所以 B^n 按定义与半径 $r > 0$ 无关，它们都是同胚的. 在拓扑学中，通常是以 $r = 1$ 的情形为代表.

按照同样的想法可知，2 维立方体 I^2 与矩形同胚.

根据类似的想法可知，所有的多边形和平面上的凸图形都和正方形同胚.

对于 I^n 和 B^n 的同胚 $I^n \cong B^n$，如果把它们之间的映射限制在它们各自的表面上，则 I^n 的表面和 B^n 的表面即 $(n-1)$ 维球面是同胚的.

当我们进行类似的考虑时可知，前述的多边形都是同胚

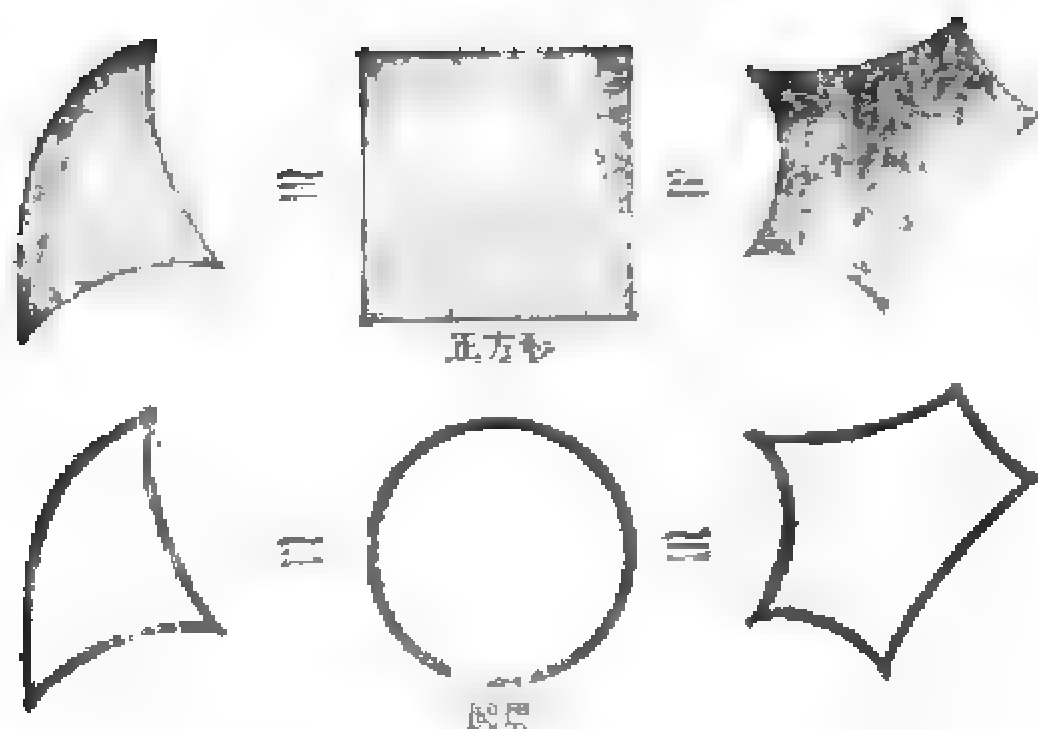


图 8-15

的，但是多边形的边不限于线段，是圆周的一部分即弧都可以，如图 8-15 那样。从这一事实又知，它们的周边都和一维球面—圆周是同胚的。

其次，我们来考虑一维球面—圆周 S^1。在其上取一点 N，点 N 与圆周的中心连结的直线与圆周交于另一点 S。一个直径的这样两个端点叫做对极点。现在，使圆周 S^1 与实数直线 R^1 切于点 S。在下图中，取 S^1 上的非 N 的任意一点 x，从 N 出发通过 x 引一条半直线。由于点 x 不是 N，所以半直线总是可以确定的，而且由于它不平行于 R，所以与 R 必有一个交点。设此交点为 $f(x)$。这样一来，就可得到由 S^1 的非 N 的点的集合到 R 的映射 $f:(S^1-\{N\})\to R$。若 x^1 是 S^1 的异于 x 和 N 的点，则由 N 出发通过 x 的半直线和通过 x^1 的半直线与 R 的交点 $f(x^1)$ 和 $f(x)$ 也是不同的。另外，若 y 是 R 上的任意一点，则 x 和 N 连结的直线，如图 8-16 那样，必和 $S^1-\{N\}$

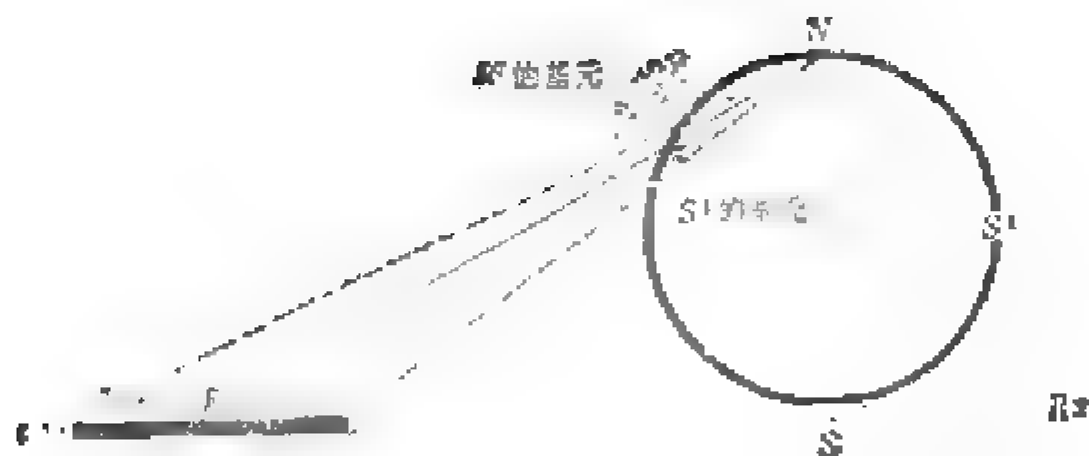


图 8-16

有一个交点。特别是当 $y=S$ 时，$x=S$。因 y 实际上是 $f(x)$，所以 f 是到上的映射，于是可知 f 是双射。其次，由于 S^1 的拓扑是从 R^2的拓扑诱导出来的，点 x 在 S^1 的开邻域是如图那样的不含两个端点的圆弧。这个开弧由 f 映为 R 的开区间。由此可知，f 是开映射，而且也是连续的。这样一来，映射 f 实际上是同胚的，通常把它叫做**球极平面投影**。由此事实证明了

$$S^1-\{N\}\cong R.$$

简单说来，直线就是除掉一点的圆周。无限延续的无法直观了解的直线这种空间，只要适当地加上一点就变成了圆周.这就把无限扩展的东西移到使我们能够看得见的地方。因此可以说，同胚真正具有惊人的威力。同样，从图 8-17 可知，二维欧几里得平面 R^2 与二维球面 S^2 去掉一点N的空间是同胚的。一般地，n 维欧几里得空间 R^n 与 n 维球面 S^n 去掉一点N的空间是同胚的，即

$$R^n\cong S^n-\{N\}.$$

现在我们考虑图 8-18。不是把全部球面而是仅把下面的南半球面放在平面上，不在赤道上的南半球的任一点 x 与

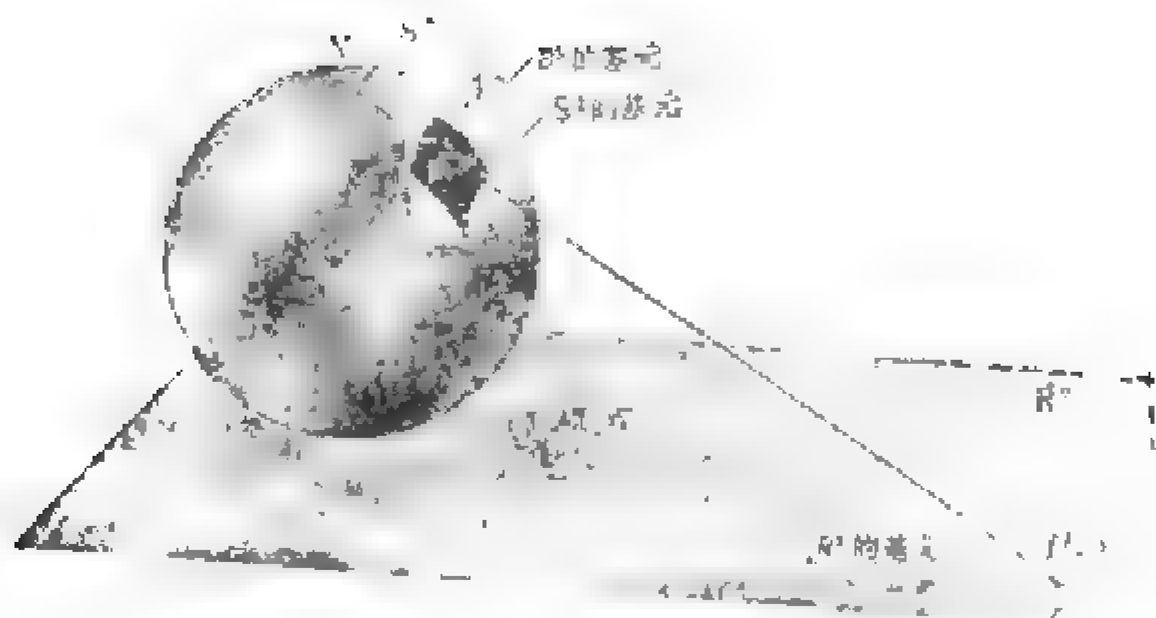


图 8-17

球面中心连结的半直线必与平面交于一点. 若这样的点用 $f(x)$ 表示，那么 f 就是从南半球面去掉赤道(圆周)的(南)半开球面 H^2 到平面 R^2 的映射 $f:H^2\to R^2$. 而且可知，和前边同样，f 是同胚的.

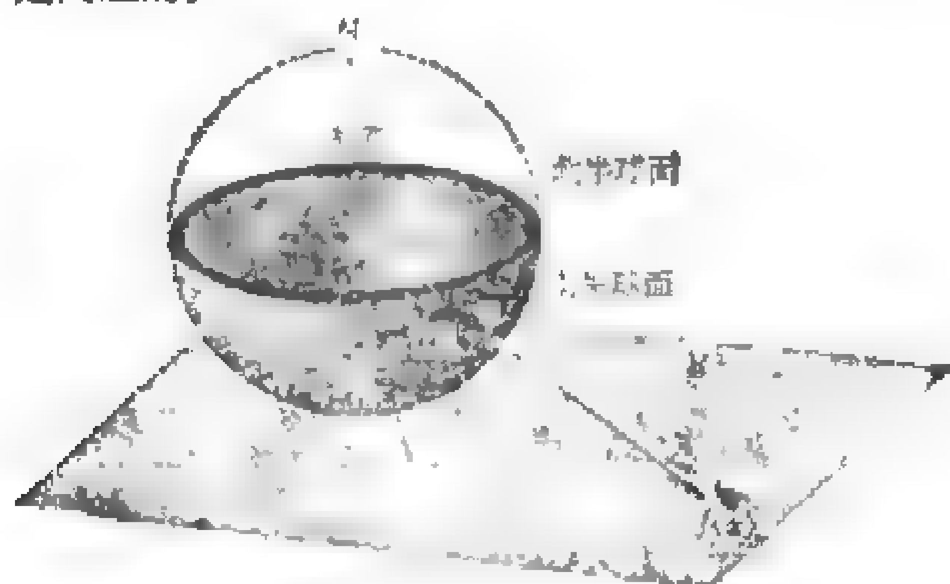


图 8-18

一般地，在 R^n 中，可用 $\{x|\rho(o,x)=1\}$ 确定 S^{n-1}，当 $x=(x_1,\cdots,x_n)$时，如果北极为$(1,0,\cdots,0)$，则南极为$(-1,0,\cdots,0)$，而赤道上点的第一个坐标都是0. 因此，开



图 8-19

南半球面可用

$$\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid\rho(o,x)=1,\ x_1<0\}$$

表示，而开北半球面可用

$$\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid\rho(o,x)=1,\ x_1>0\}$$

表示。因为它们是同胚的，所以它们都叫做 n 维半-开球面，并用 H^n 表示。于是根据上述讨论可知，对于任何维数 n 都有

$$H^n\cong R^n.$$

现在，在 H^2 的各点 x 向 R^2 作垂线，显然该垂线与 R^2 交于一点，若该点用 $f(x)$ 表示，则得映射 $f:H^2\to R^2$。根据推断，这个正射影 f，显然是向 R^2 内的一对一连续的开映射。可是，如果考虑象 $f(H^2)$ 是什么，由图 8-19 可知，它是开圆盘 OB^2。就是说，正射影 f 是 H^2 到 OB^2 的同胚映射，即

$$H^2\cong OB^2.$$

显然，一般地

$$H^n\cong OB^n$$

也成立。

以上讨论了各种同胚的例子，如果把它的内容简单直观地来说，所谓同胚映射 $f:X\to Y$，可以认为空间 X 和 Y 是由能够无限伸缩，不破不叠的理想物质（理想的橡皮膜）构成的。

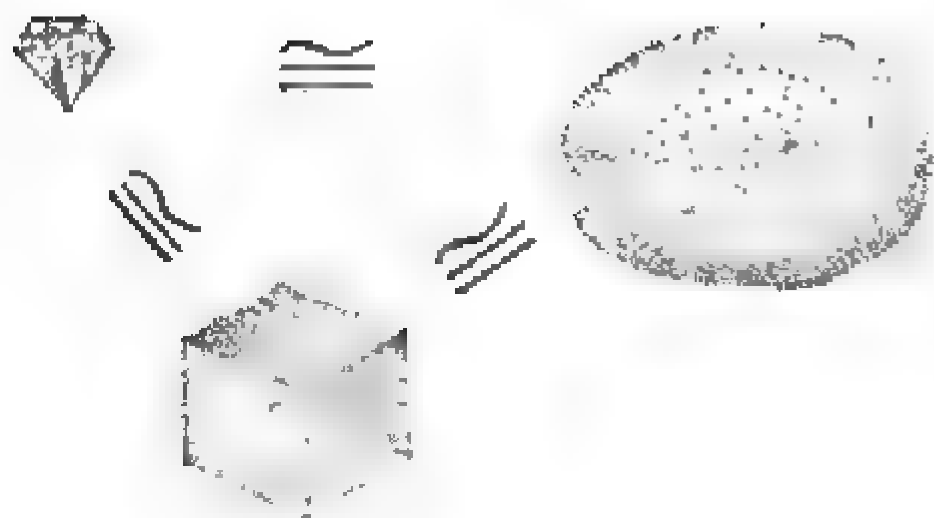


图 8-20

如果适当地把棱角、端沿弄平，极其自然地(既不切开也不粘合的意思)变形，那么就可以说 Y 是 X 变成的. 从这种意义来说，价值很高的钻石和土豆都和三维立方体是同胚的. 如果作为一种笑谈，原始时代人类所具有的直观图形，就已经正确地反映了同胚问题.

拓扑空间之间的同胚关系，实际上是等价关系. 也就是，

(i) X 与 X 同胚.

(ii) 如果 X 与 Y 同胚，则 Y 与 X 同胚.

(iii) 如果 X 与 Y 同胚，Y 与 Z 同胚，则 X 与 Z 同胚.

(i) 是恒等映射. (ii) 是说，若 $f:X\to Y$ 同胚，则其逆映射也同胚. (iii)是说，若 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 同胚，则它们的复合映射 gf 也同胚.

因为同胚关系是等价关系，所以拓扑空间根据这种关系可以分成等价类. 属于同一等价类的空间是互相同胚的，从拓扑学的角度来说，它们是**相同的**. 因为属于同一等价类的空间都可看做是相同的，所以一个等价类的全体空间使用它们的哪一个空间的名称都可以. 例如，矩形和正方形都可称

为圆盘．立方体的表面和土豆的表面都可说是球面．

于是，所谓拓扑学，大体上来说，可以看做是研究相互同胚空间的拓扑性质的数学．（这里需要注意的是，空间的拓扑概念，使用拓扑这个名称，作为一门学科有时也称拓扑这个名称，决不能混淆．）

例如，角度、长度等概念都不是拓扑学研究的对象．从第六章开始到现在，我们所讨论的问题都是有关拓扑的，它的基本问题是开集族，凡是能用开集族表示的问题都是和拓扑有关的性质，因而从第六章到现在，我们所讨论的定理和结果都是和拓扑有关的性质．

另外，我们也经常用到和同胚有关联的如下概念．把映射

$$f:X \to Y$$

的象 $f(X)$ 作为 Y 的子空间，得到映射

$$f:X \to f(X),$$

若 f 是同胚时，就说把 X **嵌入**到 Y．从而，嵌入 $f:X \to Y$ 是连续开映射且为单射，但未必是满射．就是说，嵌入是把 X 原封不动地拓扑地装入 Y 中．

例如在第一章中讨论的 R^3 中的扭结，就是把圆周嵌入 R^3．

实际上，为了判定一个映射是同胚的，常用如下结果．

定理　X, Y 是空间，而 $f:X \to Y$ 是从 X 到 Y 的双射且为连续映射．若 X 是紧致的，Y 是豪斯道夫空间，则 f 是同胚的．

对于这一结果，首先因为 f 是双射，所以只要证明 f 是闭映射即可．因此，设 K 为 X 的闭集．由于 X 是紧致的，所以 K 是紧致的．根据定理 $f(K)$ 是紧致的．又因 Y 是豪斯道夫的，所以 $f(K)$ 是闭集，从而 f 是闭映射．

例如，前边说过的 n 维立方体 I^n 和 n 维球 B^n 之间的同胚映射 f，实际上只要 f 是双射且为连续，就已充分。

§5 维数

到现在为止，关于维数这一术语，我们未加任何说明，但早已使用。因它是重要的拓扑性质，所以在此对它稍做研究。

我们先从有趣的谈法开始。在十九世纪，对于拓扑空间概念的建立有很大成就的 G. 皮亚诺 (Peano)，曾经构成了从线段 $I=[0,1]$ 到平面正方形 I^2 的连续满映射 $f: I \to I^2$。因为这是把维数是 1 的映为维数是 2 的连续映射，所以当然易于引起惊叹。现在，我们来考察，由希尔伯特将皮亚诺原作改良过的方法。

如图8-21那样，把正方形 I^2 四等分，同时把线段 I 也四等分。把它们分别设为 D_0, D_1, D_2, D_3 以及 T_0, T_1, T_2, T_3。为了易于观察，把 D_0, D_1, D_2, D_3 的中心点如图那样用线段连结起来。这是表示，T_0, T_1, T_2, T_3 依次对应用折线表示的正方形 D_0, D_1, D_2, D_3。然后，再把各小正方形 D_i 四等分作出 D_{ij}，同时也把各小线段 T_i 四等分作出 T_{ij}。对于 T_{ij} 哪一个 D_{ij} 与之对应呢，在前边的同一正方形内，若用画出的折线表示，就象图8-21(中)那样。以下同样，把小正方形 D_{ij} 再四等分作出 D_{ijk}，同时把各小线段 T_{ij} 再四等分作出 T_{ijk}，它们之间的对应，若用正方形所画的折线表示，就象图 8-21 (下)那样…。

于是，正方形列

$$D_i \supset D_{ij} \supset D_{ijk} \supset \cdots$$

与线段列

$$T_i \supset T_{ij} \supset T_{ijk} \supset \cdots$$

对应。因为它们都是紧致的集族而且任何有限个都相交，所

以根据有限交性定理，交集

$$D_i \cap D_{ij} \cap D_{ijk} \cap \cdots$$

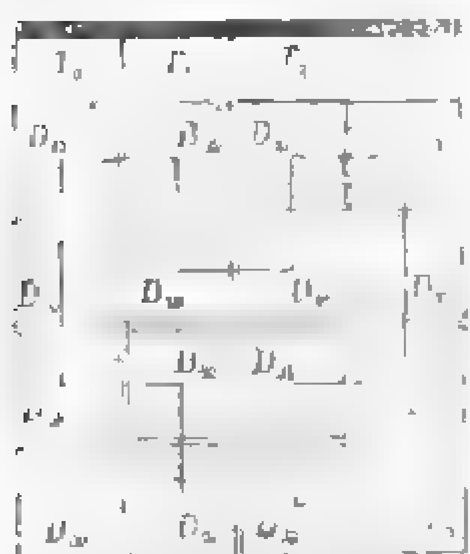
至少含有一点 $p_{ijk\cdots}$.

同样，交集

$$T_i \cap T_{ij} \cap T_{ijk} \cap \cdots$$

至少含有一点 $t_{ijk\cdots}$. 立即可知它们都是豪斯道夫的，所以它们都是一点. 因而可知，正方形内的任何一点都可作为正方形列的





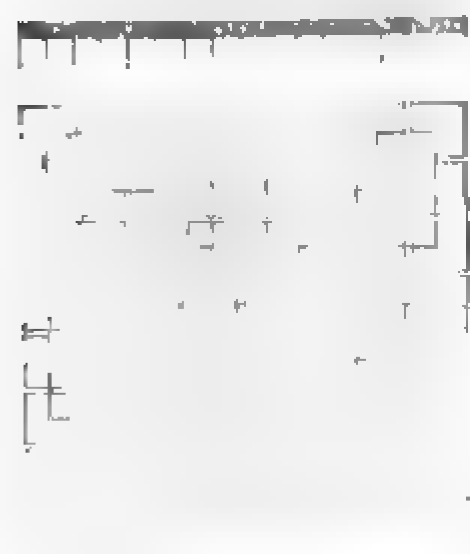
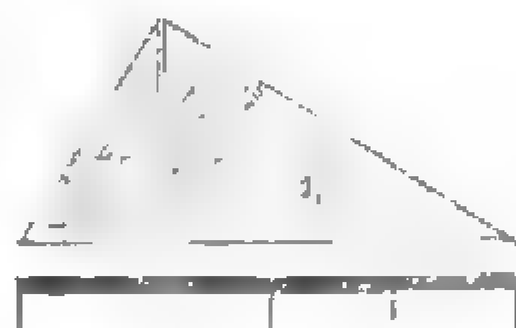


图 8-21





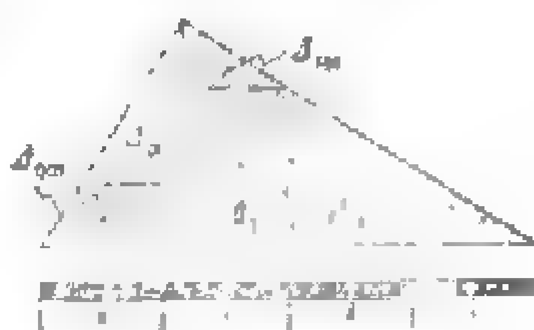


图 8-22

交集表示出来. 显然，对于一点可有许多方法选择它的正方形列. 同样地，线段上的任何一点也都可作为小线段列的交集(虽说许多种，实际上是两种)来表示. 因此，映射 $f:I\to I$ 可如下作出：对于 I 的任意一点 x 首先作出小线段列，然后在正方形内作出与折线对应的正方形列，使 x 或正方形列交集之点对应. 如使用点列时的映射，立即可知 f 是连续的. 若把上述操作反过来，使人感到意外的是，这一映射还是满射. 但是若进一步研究，可以看出，f 不是单射，而线段的点中有时 2 个，3 个甚至 4 个映为正方形的一个点. 这是当然的，如果若不是那样，就是说，若 f 是双射而且是连续的，那么因为 I 是紧致的，I^2 是豪斯道夫的，所以根据定理，I 和 I^2 是同胚的. 如果是这样，那么拓扑学也就什么也不是了.

由图 8-22 可知，$f:I\to I^2$ 也可用 $f:I\to$(三角形)来表示. 这样做也许还简单些.

若这样继续下去，对于任何 n 都能够作出连续满映射 $f:I\to I^n$. 由于这样的原因，所以就 $f:I\to X$ 的连续映射来说，如在弧状连通时讨论的那样，一般地，$f(I)$ 不是简单曲线. 显然，那里的讨论是正确的，由此可见研究维数是十分必要的. 但在此顺便提一下，一般地，线段 I 的连续象所成的空间叫做**皮亚诺空间**. 实际上，空间 X 是皮亚诺空间的充分必要条件是，X 是非空紧致连通的局部连通的可度量空间.

维数的定义有各种各样的，在此我们讨论使用开覆盖的勒贝格 (H. Lebesgue) 维数. 设拓扑空间 X 是豪斯道夫的正则的. 当已给 X 的任意有限开覆盖 $G_1,\cdots,G_s$ 时，各元 H_i 含于 G_i 且任意 $n+2$ 个 H_i 不具有共同点的开覆盖 $H_1,\cdots,H_s$ 存在时，就认为 $\dim X\leqslant n$. 就是说，X 的维数不超过 n. 而且，当 $\dim X\leqslant n$，而不是 $\dim X\leqslant n-1$ 时，X 的维数是 n，并且规定 $\dim X=n$. 维数是出乎想象之外的微妙的一种概

念。对于任何 n，使 $\dim X \leqslant n$ 都不成立时，就说 X 的维数是无限的。

现在，我们取 R。对于实数直线的有限开覆盖 $\{G_i\}$，开集的基是开区间，它们中间任意 $(n+1)=2$ 个不具有共同点者不能覆盖 R，而任意 $n+2=3$ 个没有共同点者能够覆盖 R，所以推测不是 $\dim R \leqslant 0$，而是 $\dim R \leqslant 1$。对这一推测可确切地表示出来。就是说，$\dim R=1$。于是，就度量空间 X，Y 来说，因为积定理

$$\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y$$

成立，所以 $\dim R^2=2$，$\dim R^3=3$，$\cdots$，一般地，$\dim R^n=n$。

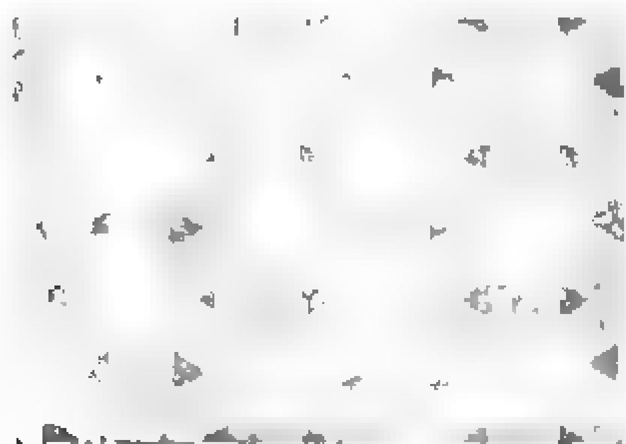


图 8-23

$\dim R^2 \leqslant 2$，而不是 $\dim R^2 \leqslant 1$，它的意义是，大致象图 8-23 那样，平面被小圆盘覆盖。这一问题若详细来说是相当麻烦的，所以从略。但是下面的事实成立。

若 R^n 的开集 A 和另一集合 $B \subset R^n$ 同胚，则 B 也是开集。利用这一结果可以证明，对于 R^m 和 R^n，当 $m \neq n$ 时，它们不同胚。

还有如下定理

嵌入定理 n 维可分的度量空间是可嵌入到 $2n+1$ 维欧几里得空间的子空间。

另外，下面的更一般的定理也成立。

定理 正则的具有可数基的拓扑空间可嵌入希尔伯特方体 $I^{\aleph_0}$ 作为它的子空间。

到此为止，在这本书中，我们考虑的几乎所有集合，如度量空间 R^n, B^n, S^n 等(由三点构成的拓扑空间不在内)，因为它们都是希尔伯特方体 $I^{\aleph_0}$ 的子空间，所以我们通常所描绘的空间都可用不考虑基数 $\aleph_0$ 而取充分大 n 的 n 维立方体——欧几里得空间 R^n 的子空间表示出来。

到此为止，我们做了很大的努力，把数的概念扩充到一般

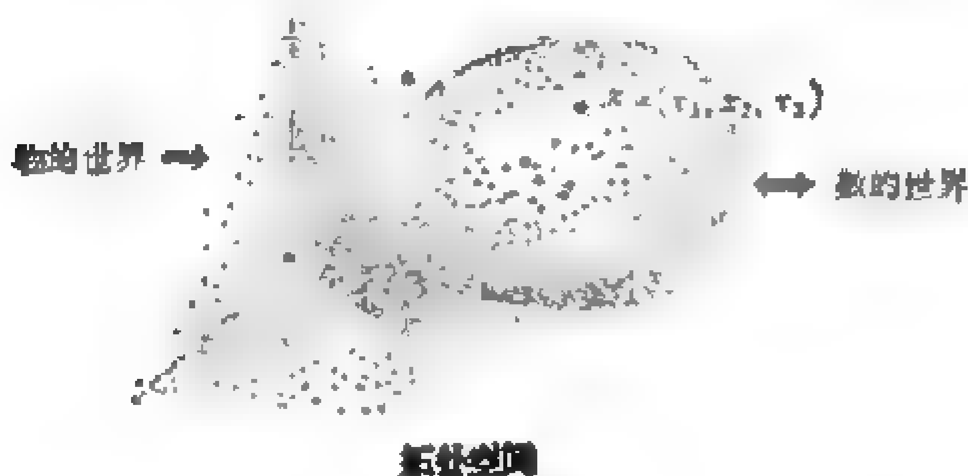


图 8-24

的事物的汇集——集合，把数学作为数以外的事物来对待。在此我们得到结论，一般来说，如果把元素看做几何学的点(即，若是用点来代表元素)，那么我们所考虑的集合(拓扑空间)从几何学的角度就可看做维数充分大的欧几里得空间的子空间。

我们已知，欧几里得空间可用实数组来表示，能够在其中进行数的计算。如果我们回顾一下我们所作的努力，我们能够抓住以事物的汇集作为空间这一点，那么它就是 R^n 的一部分，就是数的计算对象。如果对象是数组，那么传统的古典分析学就能够发挥作用。归根到底事物的汇集的性质是可用数学方法来处理的。

第九章　流　　形

§1　流形

在第六章中，我们介绍了拓扑空间．然后在第八章中讨论了拓扑空间的有关拓扑性质，其中一个重要性质是用同胚对拓扑空间进行分类，也就是找出所有的等价类问题．就是说，我们考虑把拓扑空间的所有等价类一个不漏的全部确定下来．

在任意集合 X 中存在满足公理 1—5(第六章§1) 被称为拓扑的子集族，拓扑空间是由这个子集族和 X 构成的对所确定的．所以，对于任意集合都可根据适当选择的拓扑作成拓扑空间．我们可能认为所有的集合，在这种意义下(不考虑它的数学意义和应用)都能成为拓扑空间，而且用同胚把它们分类，如果能够这样做那是好极了，但这并不是那么容易的事情．在数学以及科学当中表现出来的拓扑空间，起重要作用的是流形．因此，我们首先讨论用同胚对流形进行分类问题．关于一般维数的问题将在后面讨论，现在让我们首先从流形的直观的能够看得见的情形谈起．我们来考虑，在我们面前的铅笔、咖啡杯或者饼干圈等各种物体的表面．实际上，这些表面都是二维流形或叫做曲面的拓扑空间．我们现在来研究，在一般的拓扑空间中，曲面具有怎样的特别构造．例如，我们来观察球面、炸面圈的表面——环面．假定在它上面有一个小虫．象在第一章(拓扑学的进展)中已讨论的那样，如果这个小虫有一双很近视的眼睛，那么小虫能够看到的球面部分，就象稍有弯曲的圆盘那样．同样地，在环面上的小虫所见到

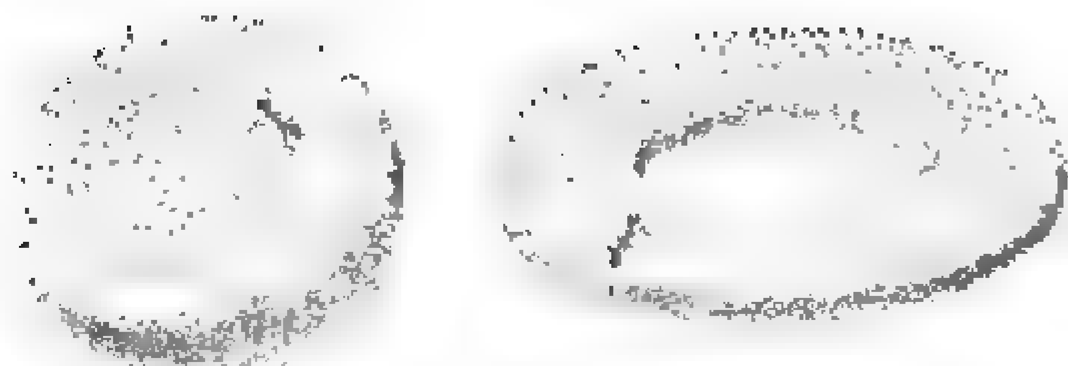


图 9-1

的和在球面上所见到的没什么不同。可以想象，小虫在两种情况下所看到的，都是以平面的某点为中心以 1 为半径的开圆盘同胚的景象。从这一事实来说，曲面或二维流形是具有如下条件的拓扑空间：在它的任意点都有和开圆盘同胚的邻域。如果把这一问题用一般维数确切地说，则如下：

所谓 n 维流形，它是可分的度量空间，并且它的任意点 x 都有邻域同胚于 n 维开球 $OB^n = \{x|\rho(o,x) < 1\}$ 的拓扑空间。n 维流形有时也简称为 n-流形。一般地，取流形（manifold）的第一个字母，用 M^n 或 M 表示。

首先，说明一个需注意的问题，设 x 是 n-流形 M^n 的任意一点，V 为 x 的任意开邻域。因为 M^n 是 n-流形，所以可以取得和 OB^n 同胚的开邻域 U。参照图 9-2 可知，$V\cap U$ 是含有点 x 的 M^n 的开集且含于 U。设从 OB^n 到 U 的同胚映射为 $f: OB^n \to U$。在此为了简单，设 OB^n 的中心 o 由 f 映为 x，即 $f(o) = x$。于是，$f^{-1}(V\cap U)$ 是 OB^n 的开集而且含有点 o。因为 $f^{-1}(V\cap U)$ 是开集，所以能在 $f^{-1}(V\cap U)$ 中取到小的 n 维开球 OB^n_0。因此 $f(OB^n_0) = U_0$ 是含有点 x 的含于 $V\cap U$ 的 M^n 的开集，也就是 x 的开邻域。由此可知，所谓 M^n 是 n-流形，也可如下定义：M^n 是这样的一个拓扑空间，它是一个豪斯道夫空间，而且在它的各点 x 若取开邻域 U，则能取到含



图 9-2



图 9-3

于U而同胚于n维开球的开邻域U_0。

我们来讨论一个例子。对于n维欧几里得空间R^n，因为以它的各点为中心能够作出n维开球，所以R^n本身是n维流形。但R^n不是紧致流形。n维球面S^n在R^{n+1}中是以

$$S^n = \{x \in R^{n+1} | \rho(o, x) = 1\}$$

定义的，它也是n维流形。例如我们考虑$n = 2$的情形，如图9-3那样，取一点(1,0,0)。若把$x_1 = 0$定为赤道平面，则S^2被分为北半球面和南半球面。如在第八章中那样，我们来考虑北半开球面，从这个北半开球面H^2向赤道平面作正射影。于是由图可知，正射影使H^2和OB^2成为同胚的。就是说，北极(1,0,0)是以和OB^2同胚的H^2作为邻域。进而，对于S^2的

任意点 y 来说，如图那样，绕球面的固定中心作旋转，可使 y 与北极重合。正如刚才考察的那样，对于北极来说是存在所要求的邻域的，因此对这个邻域如果实行一次由 y 到北极的旋转的逆旋转，则该邻域就成为和 OB^2 同胚的 y 的邻域。类似地考虑，n 维球面 S^n 是 n-流形。同样考虑可知，环面是 2-流形(＝曲面)。而且它们都是紧致流形(因为它们都是可分度量空间 R^n 的子空间，所以它们本身是可分的度量空间)。

其次，我们来讨论圆盘。对于圆盘来说，根据点的取法不同，它的邻域的形状是不一样的。在图 9-4 中，点 a 和在平面时相同，它具有和开圆盘 OB^2 同胚的邻域，但点 b 的邻域不是开圆盘，而是叫做半-开圆盘的空间。

一般地，在 n 维欧几里得空间 R^n 中，由

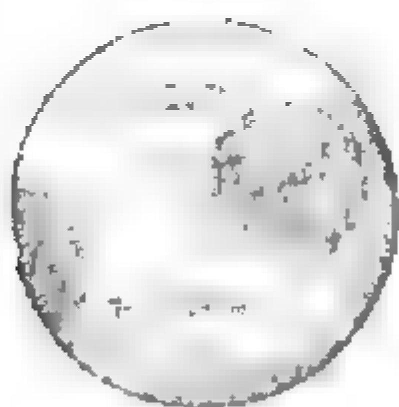
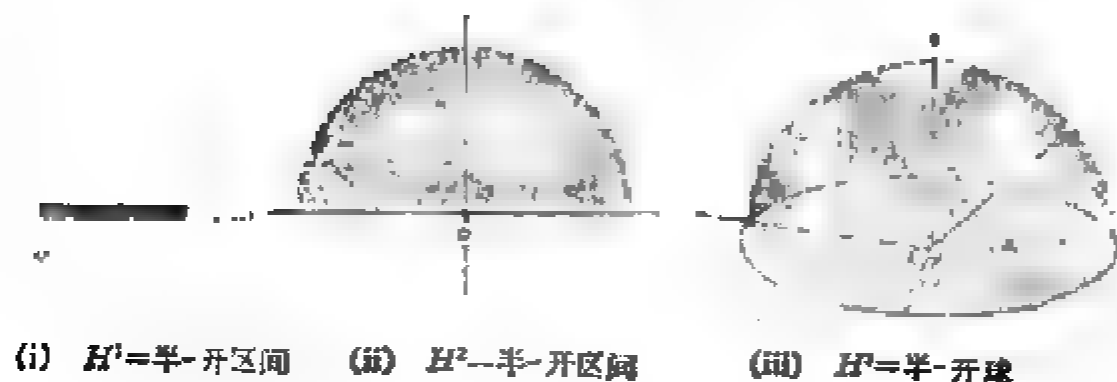


图 9-4



(i) H^1＝半-开区间　(ii) H^2＝半-开区间　(iii) H^3＝半-开球

图 9-5

$$H^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid \rho(o, x) < 1, x_n \geq 0\}$$

确定的子空间叫做 n 维半-开球．当 $n = 1$ 时，如图 9-5 中的(i)；当 $n = 2$ 时，如图(ii)；当 $n = 3$ 时，如图(iii)那样．象图 9-4 中点 b 那样的点叫做边缘点．这种点的集合是圆盘周围的圆周．在这种意义下，圆盘不是我们在前边所定义的流形，但对这类问题可定义如下概念．

所谓**带边**的 n-流形，就是可分度量空间的任意点 x 都有邻域和 n 维开球 OB^n 或 n 维半-开球 H^n 同胚的拓扑空间．(和前边同样，对于点 x 的任意开邻域 V，具有含有 V 的和 n 维半-开球同胚的 x 邻域．) 具有和 n-开球同胚邻域的点叫做**内点**，具有和 n-半-开球 H^n 同胚邻域的点叫做**边缘点**，边缘点的集合叫做该流形的**边缘**．内点的集合叫做**内部**．因此，圆盘是以圆周为边缘的带边的 2-流形(带边曲面)．

带边流形，可从无边缘流形中去掉某一开集而得到．

圆盘就是从球面去掉一个开圆盘而得到的．图 9-6 就是从球面去掉互不相交的四个开圆盘(或从圆盘去掉三个开圆盘)而得到的带边曲面，作为空间它是紧致的．

图 9-7 是由无限延展的四根导管合起来构成的非紧致曲面，从中去掉两个开圆盘就得到了非紧致的带边曲面．

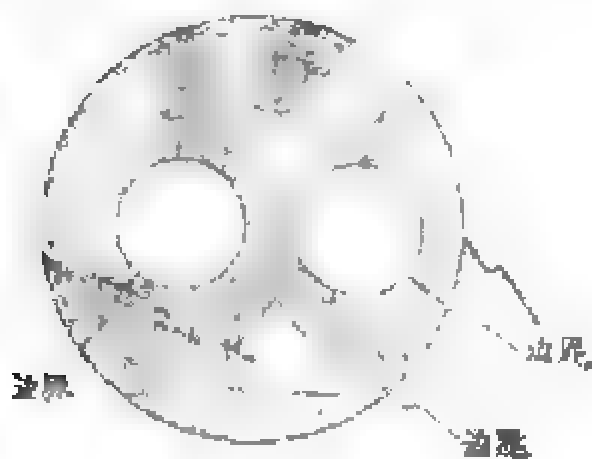


图 9-6

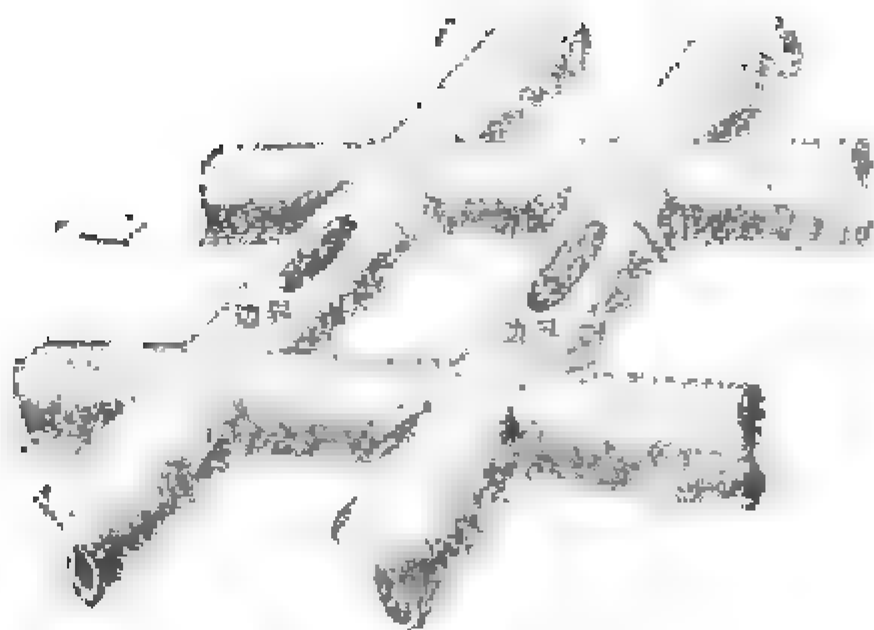


图 9-7

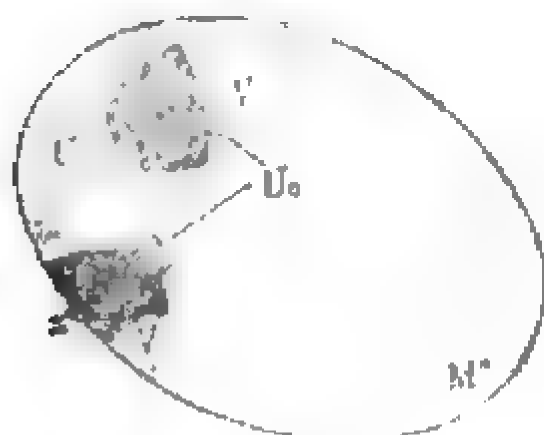


图 9-8

若把上面讨论的流形归纳起来，就是：

流形
- (无边缘)流形
  - 紧致流形……如 S^n
  - 非紧致流形……如 R^n
- 带边流形
  - 紧致流形……如 B^n
  - 非紧致流形……如 H^n

特别是，把无边缘紧致流形叫做**闭流形**，如果是曲面时，就叫**闭曲面**。

现在，我们来考虑各种 n-流形 M^n 的任意开集 U。U 的

相对拓扑是 M^n 的开集 V 和 U 的交集 $V\cap U$，它仍然是 M^n 的开集。从而，对于 $V\cap U$ 的任意点 x，总能找到和 OB^n 同胚的开邻域 $U_0\subset V\cap U$。因为 U 是可分度量空间 M^n 的子空间，所以它本身也是度量空间，于是 U 是 n-流形。

特别是，当 U 是弧状连通时，n-流形 U 叫做 M^n 的**区域**。它和映射的定义域是同一个词，容易混同，读者应注意不要弄错。

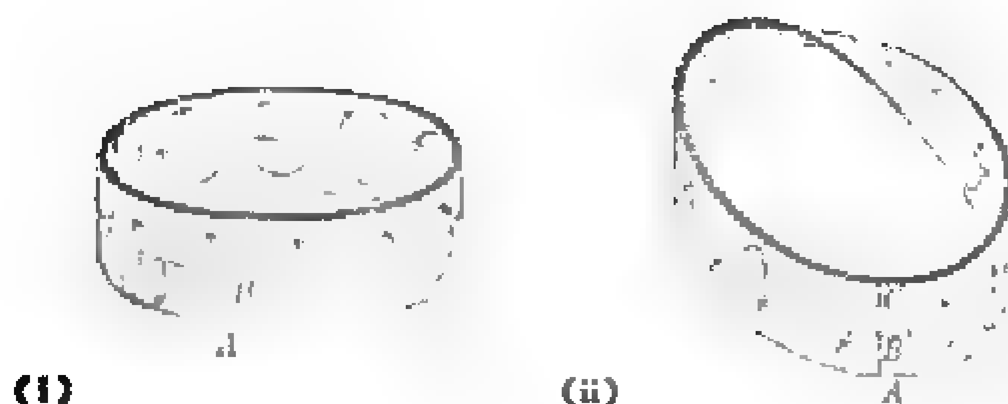
§2　不可定向流形

拓扑空间特别是限于流形来说，在拓扑学的意义下流形能有多少种呢？如何把曲面分为各种类型呢，现在我们来研究这些问题。

作为问题，还有一点是不好理解的，那就是大家熟知的麦比乌斯（Möbius）带。如图 9-9（ii）所表示的，它具有一种奇异的性质，当我们沿着中心线剪裁时，实际上变成了没有剪开的与原来同样形状的细长带子。现在，我们就来研究这个曲面的性质。

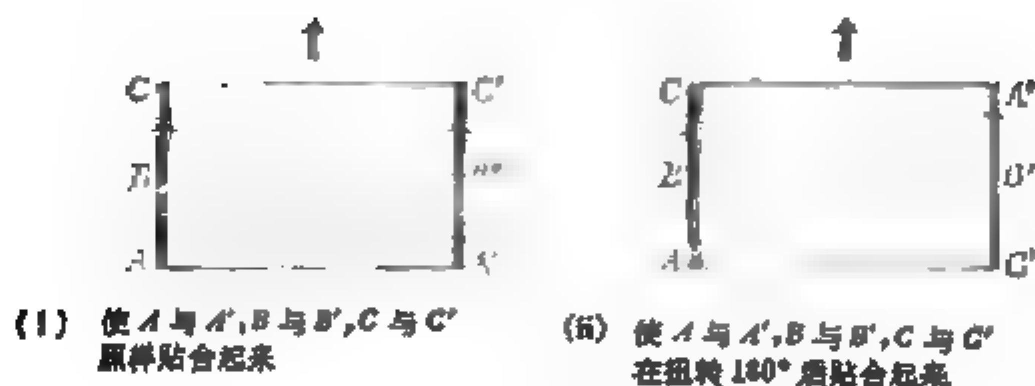
图 9-9 的(i)，(ii) 分别是圆柱和麦比乌斯带。它们都是带边曲面，而且都是把矩形的一对对边贴合起来作成的。正如大家所知，对柱面来说，只要把矩形的一对对边照原样贴合起来即可。但是对麦比乌斯带来说，需要把矩形扭转（扭转一次，即 180°）后贴合才成。我们来观察赋予方向的小圆周沿着两个曲面上的各自中心线的圆周（在图 9-10 中分别由线段 BB' 贴合两个端点 B 与 B' 形成的圆周）绕行一周的情况。在圆柱的情形，绕行一周后，小圆的方向和原来圆周的方向一致，而在麦比乌斯带的情形，如图那样，与原来方向相反。

象麦比乌斯带的中心圆周那样，带有方向的小圆周沿着它绕行一周回到原来位置时，小圆周的方向和原来的方向相



(i)　　(ii)

图　9-9



(i) 使 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 原样贴合起来　　(ii) 使 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 在扭转 180° 后贴合起来

图　9-10

反的闭路叫做**不可定向的**．与此相反，象圆柱的中心圆周那样，带有方向的小圆周沿着它绕行一周回到原来位置时，小圆的方向与原来的方向一致的闭路(圆周)叫做**可定向的**．而且，任何闭路都是可定向的曲面叫做**可定向的**．至少有一个不可定向闭路的曲面叫做**不可定向的**．也就是，圆柱、球面以及环面是可定向曲面，但麦比乌斯带是不可定向曲面．

就一般的 n-流形 M^n 来说，可用带有方向的小 $(n-1)$ 维球面代替带有方向的小圆周．现在我们来研究 M^n 中的闭路．因为 M^n 的各点具有和 n 维开球同胚的邻域，所以在闭路各点的充分小 $(n-1)$ 维球面可看做在和 n 维开球同胚的邻域之中．如果 M^n 是曲面时，那么充分小的 $(n-1)$ 维球面就是小圆周．对于小圆周是用箭头定向的，现在对于一般

维数的球面给与如下定向。如在球面上取一点 p，考虑它和开圆盘同胚的邻域，就象在 R^2 中那样，以 p 为原点确定如图那样的坐标系 $O(x, y)$。然后，根据坐标系是右手系还是左手系来确定球面是正向还是负向。于是，让如此定向的 $(n-1)$ 维球面沿 M^n 的闭路转动一周回到原来位置，这时若与原来方向一致，则它的闭路是可定向的，如果相反，则闭路是不可定向的。而且和曲面的情形相同，我们规定，任何闭路都可定向的 M^n 是可定向流形，有一闭路不可定向的 M^n 是不可定向流形：

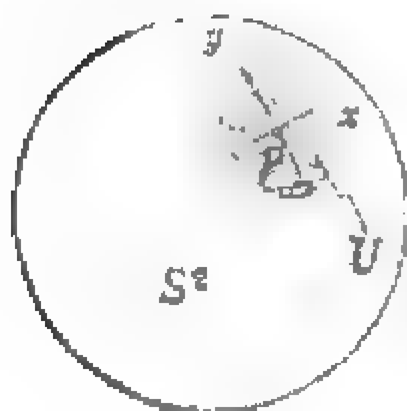


图 9-11

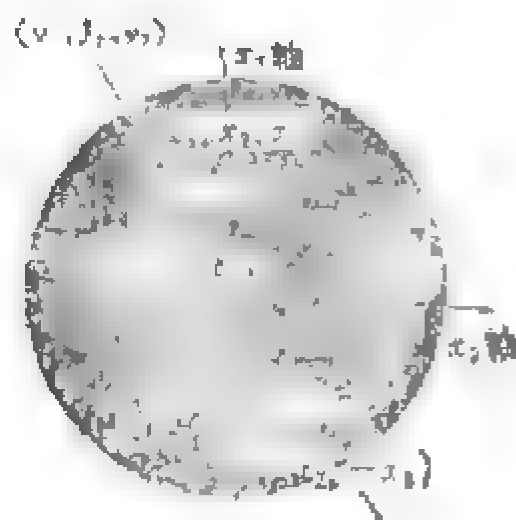


图 9-12

这样一来，流形一般可分为两种类型。

我们已知，麦比乌斯带是带边的曲面，下面我们来研究作为不带边的不可定向曲面的代表的射影平面。在平面射影几何中，和欧几里得几何相同，也是研究平面图形。但在射影几何中的平面并不是欧几里得 2 维空间 R^2，而是象下面那样的叫做射影平面的曲面 P^2，它和 R^2 具有完全不同的拓扑性质。射影平面的点通常用齐次坐标 (x_1, x_2, x_3) 表示。所谓齐次坐标，和 R^2 的直角坐标不同，各 x_i 至少有一个不为零的实数，

而且存在非零的实数 λ 使得 $y_i=\lambda x_i(i=1,2,3)$ 的坐标 (y_1, y_2, y_3) 和 (x_1, x_2, x_3) 表示同一点. 若把齐次坐标 (x_1, x_2, x_3) 看做普通欧几里得空间 R^3 的直角坐标系点的坐标,则 (x_1, x_2, x_3) 与 (y_1, y_2, y_3) 是射影平面 P^2 上的同一点,而在 R^3 中点 (x_1, x_2, x_3)与 (y_1, y_2, y_3) 是通过坐标原点的同一直线上的点. 因而,射影平面 P^2 可以看做把通过 R^3 原点的直线作为点的空间. P^2 的点的邻域也就是通过原点的直线的邻域,若规定为含有该直线的 R^3 的一开集,则 P^2作为通过原点的直线的集合,它是拓扑空间.

若取以原点为中心任意半径的球面 S^2, 则通过原点的直线如图那样和球面交于点 (x_1, x_2, x_3) 以及它的对径点$(-x_1, -x_2, -x_3)$. 就是说,P^2 的一点可用S^2的一对对径点表示. 归纳上述讨论,可给予下列定义. 若把 R^3 的球面 S^2的所有对径点对各看做一个点,则由 S^2 得到的商空间叫做**射影平面**,并用 P^2 表示.

一般来说,若把 S^n 的每一对对径点看做一个点,则由 S^n 得到的商空间叫做 n 维射影空间,并用 P^n 表示.

若把 S^2 用 x_1, x_2 平面 $(x_3=0)$ 来截,则 S^2 被它的赤道截为两个半球面. 而且,不在平面 $x_3=0$上的通过原点的直线也被分为两个部分,它与球面交成的对径点,一个在北半球上,另一个在南半球上. 在平面 $x_3=0$ 上的通过原点的直线的对径点显然在 S^2 的截口赤道圆周上. 若把从 S^2 去掉南半球和赤道面的北半球设为 K, 则 P^2 可以看作只是

$$K=\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_3 \geqslant 0\}$$

的边缘赤道圆周的对径点各作为一个点的商空间. 若用正射影使北半球上的点 (x_1, x_2, x_3) 与赤道面上的点 $(x_1, x_2, 0)$ 相对应,则这个正射影是拓扑映射,而且K 和以赤道圆周为边缘的圆盘 B^2 同胚. 因此,P^2 也是由圆盘

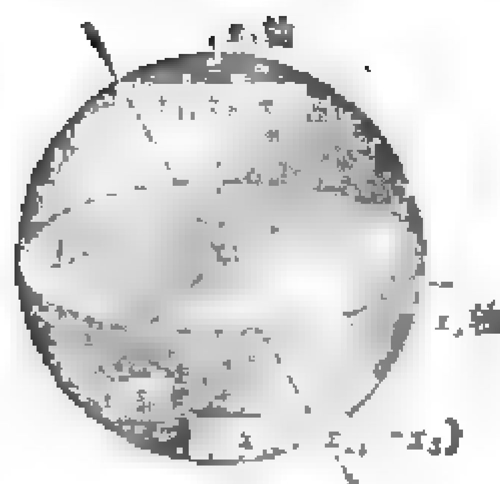
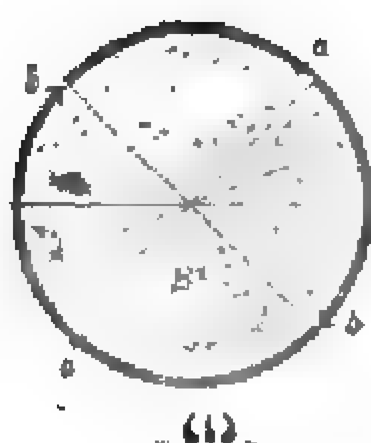
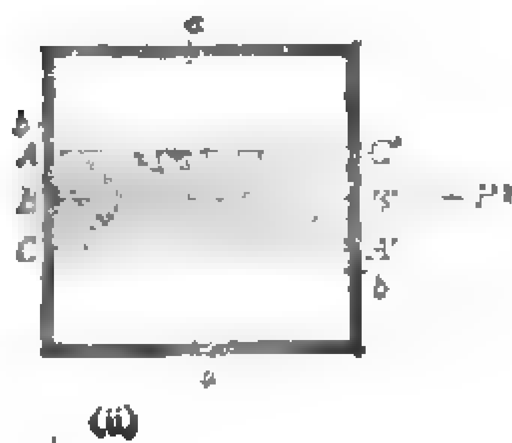


图 9-13



(i)



(ii)

图 9-14

$$B^2=\{(x_1, x_2)\,|\,x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$$

把它的边缘圆周上的对径点各看做一个点的商空间。因为圆盘和正方形是同胚的，所以 P^2 就是由正方形的对边按箭头方向一致把 a 与 a，b 与 b 迭合所产生的商空间。当考虑此正方形内图 9-14 中用阴影表示的矩形时，把它的纵向对边 ABC 和 $A'B'C'$ 迭合，因为它的横向对边 CA' 和 AC' 在正方形内，所以在作成 P^2 时不能迭合。就是说，在 P^2中，矩形 $ACA'C'$是麦比乌斯带，从而它的中心线(虚线)作成的圆周是不可定向的道路。因此，P^2 是不可定向的。这里需要注意，从射影平面去掉麦比乌斯带的剩余部分，象图 9-15 那样是四边形，在



图 9-15

它的边中没有什么迭合的条件，从而它是开圆盘. 由此可知，把麦比乌斯带的边缘和圆盘的边缘迭合的商空间就是 P^2.

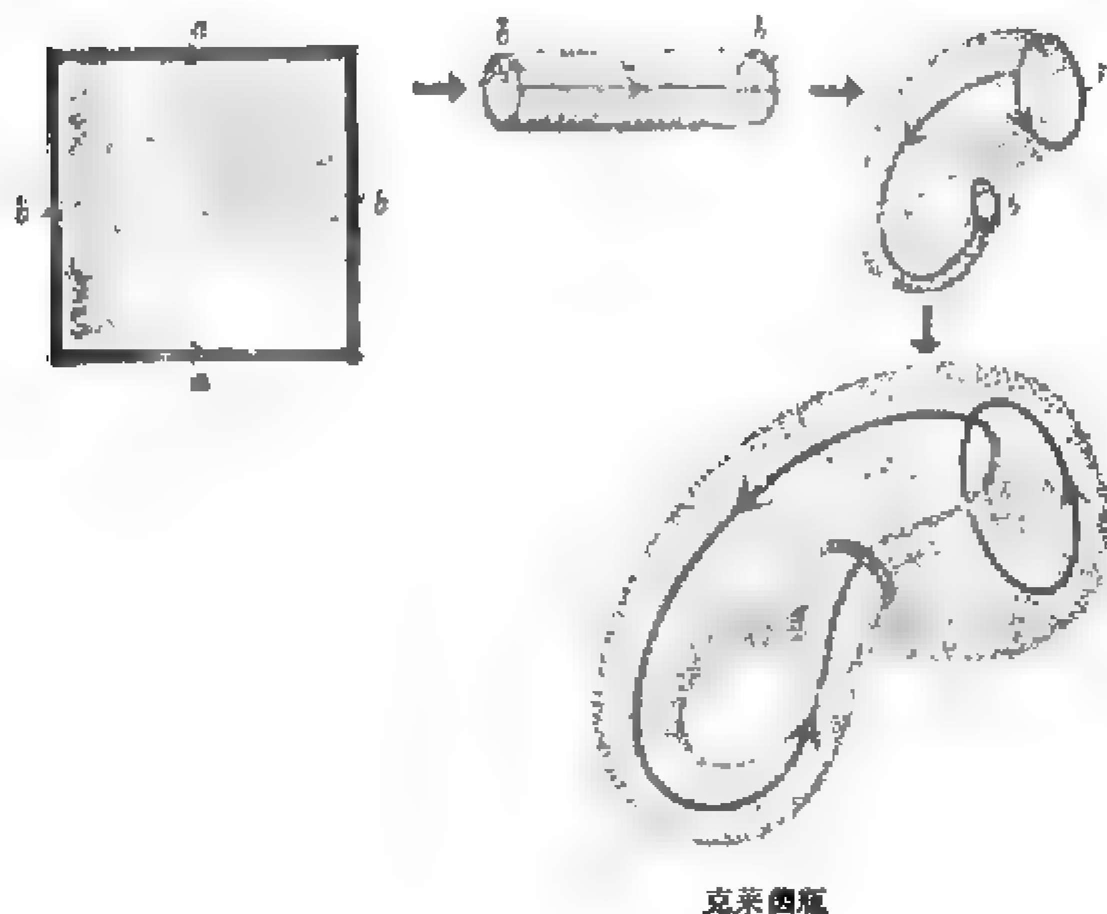
作为理论将在后边讨论，但是现在已知 P^2 是没有边缘的曲面，如在图 9-14(i) 中，按定义 P^2 的任何点都具有同胚的邻域. 这是因为对内点来说，如图的中心点确实满足曲面的条件，对图的边缘上的点来说，在 P^2 中的邻域是把被圆周分开的两个小开圆盘的直径迭合的空间，就是说它也确是开圆盘.

不可定向的闭曲面，还有个例子就是**克莱茵** (Klein) **瓶**. 克莱茵瓶可如下定义：它是把正方形的对边如图那样，在方向一致的条件下，a 和 a，b 和 b 迭合的商空间. 这类的射影平面以及克莱茵瓶等不可定向的闭曲面，在 R^3 中是不能实现的. 所以图 9-16 和 9-17 只是克莱茵瓶和射影平面分别在 R^3 的一种图示. 图中的粗线并不是真正的交线，实际上在 R^4 中交线就会消失.

这个问题可直观地说明如下．首先在平面上引一条直线 R，在它的上方和下方取两点 a 和 b．于是，不论怎样连结 a，b 所成的弧，必和直线至少有一个交点(图 9-18(i))．

可是，如果把平面 R^2 放人 R^3 中来考虑，那末在 R^3 中，如图(ii)那样，就能够连结 a，b 与 R 不相交的弧．前图(i)的交点 c 的部分在 R^2 中已不存在，而出现在 R^3 中．

射影平面和克莱茵瓶最好在 R^4 中讨论．它们所以出现自身相交，是因为我们把射影平面和克莱茵瓶放人 R^3 中引起的，使它们自身交成圆周和线段．这一点如象弧上点 c 那样想法，如果使它们不在 R^3 而在 R^4 中出现，正象在平面中使 a，b 两点连结的弧在 R^3 中不相交那样，自身相交的问题就会消失．遗憾的是我们不能看见射影平面和克莱茵瓶，但在 R^4



克莱茵瓶

图 9-16

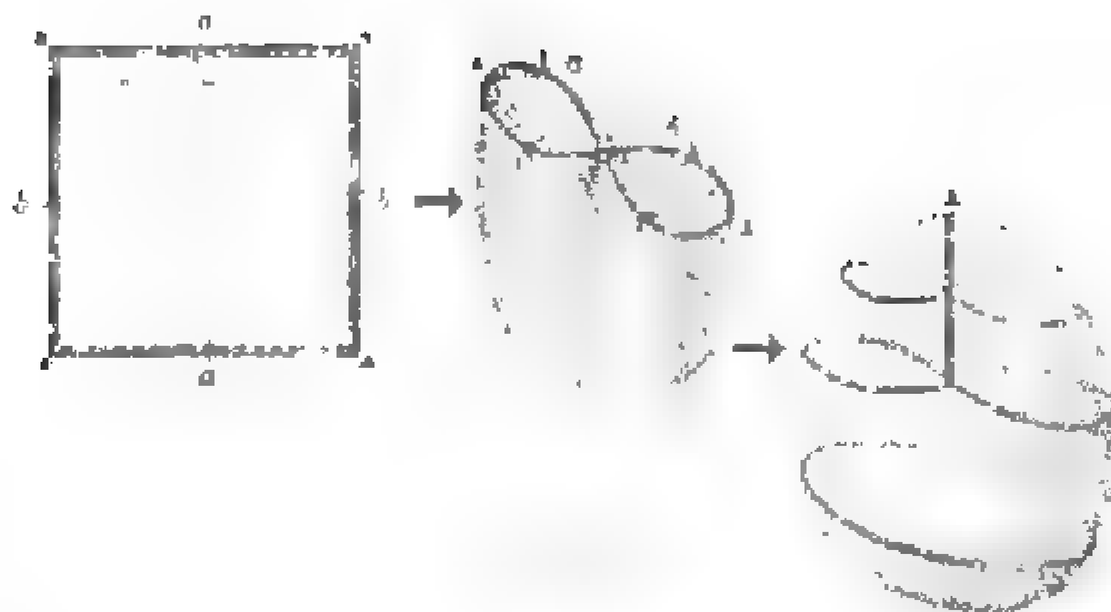
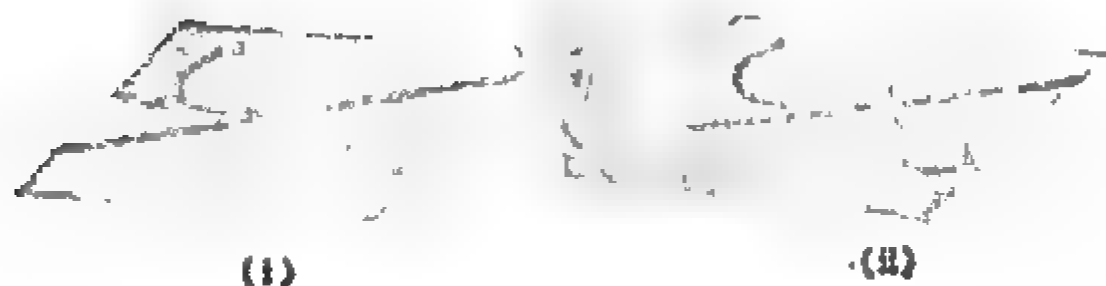


图 9-17



(i)　　　　　　　　(ii)

图 9-18

中(也就是嵌入 R^4)是能够看到它们的本来面貌的。

类似射影平面或克莱茵瓶这样的流形，也可以考虑曲面以外的一般 n 维流形． 特别是，n 维射影空间 P^n，当 n 是偶数时，它总是不可定向流形。

由此可知，被认为简单的流形也显示出意料之外的复杂问题，因此可以说我们所在的世界的确是一个充满趣味的奇妙的世界。

第十章　闭曲面的分类

我们已知，流形M^n是丰富多变的，如它有无边界，是否紧致，是可定向的还是不可定向的等等．从而，使我们感到流形的分类将是很困难的．首先，让我们从$n=1$开始吧．当$n=1$时，即一维流形，根据它的定义，几乎不存在不可定向的流形，而且可知，只有如下四种．

圆周 S^1　　无边界，　紧致．

实数直线 R^1　　无边界，非紧致

开区间 (a,b)　　无边界，非紧致

闭区间 $[a,b]$　　有边界，紧致

半直线　　有边界，非紧致

区间 $[a,b)$　　有边界，非紧致

实数直线R^1和开区间$(a,\ b)$是同胚的，而半直线和区间$[a,\ b)$显然也是同胚的．因为一维流形的所有情形就是这么多，所以下面我们来讨论$n=2$的曲面的情况，但为了简单，我们只讨论没有边界的曲面，即闭曲面．

§1　标准形

闭曲面有很多种，象我们讨论过的球面、环面、射影平面、克莱茵瓶等，从拓扑学的角度来看，它们都是闭曲面．在曲面

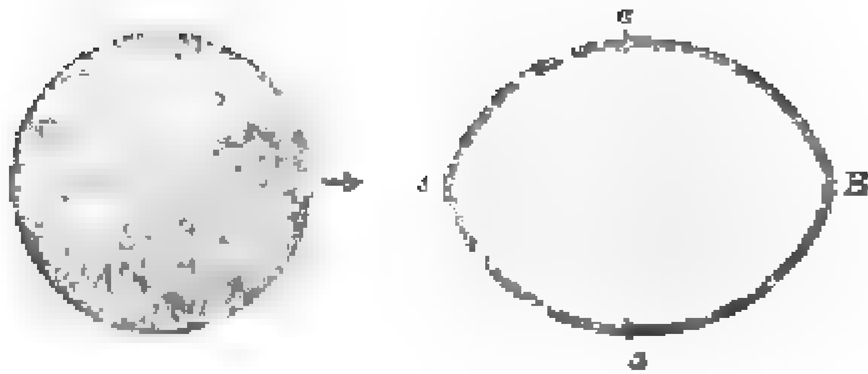


图 10-1

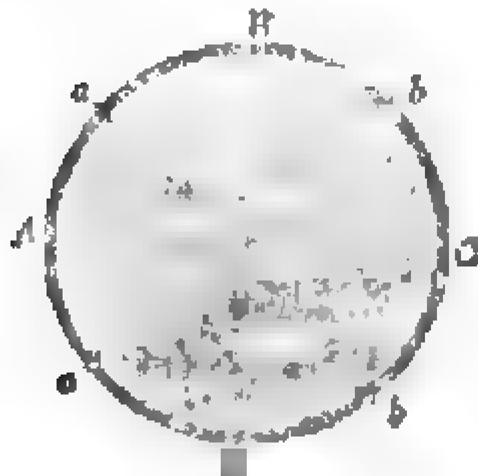


图 10-2

分类的时候，闭曲面的标准形和曲面的连通和的概念都很重要． 我们首先来讨论标准形． 把球面 S^2 用平面沿着图中的线段 a（由 A 到 B）切开，就变成了二边形．即球面 S^2 是由二边形把它的两个边按图 10-1 箭头方向一致迭合起来的商空间．这样，对于指出其边迭合关系的多角形，迭合后就可得出原曲面的商空间时，多角形叫做已知曲面的**多边形表示**． 图 10-2 也是 S^2 的多边形表示． 标准形的迭合关系可用有序记号列表示，作法如下： 标准形的边从某点开始按反时针方向前进，当前进方向与箭头方向一致时，该边用原记号表示，当方向相反时，该边用原记号加上指数 $^{-1}$ 表示，当绕行一周时，就得出标准形的有序记号列．例如，球面的情形就是图 10-1 中的 aa^{-1}，图 10-2 中的 $abb^{-1}a^{-1}$． 显然图 10-1 比较简单，

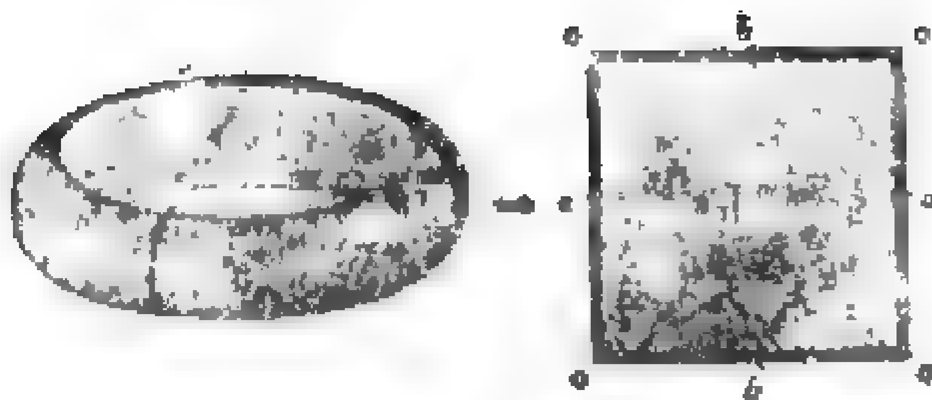


图 10-3

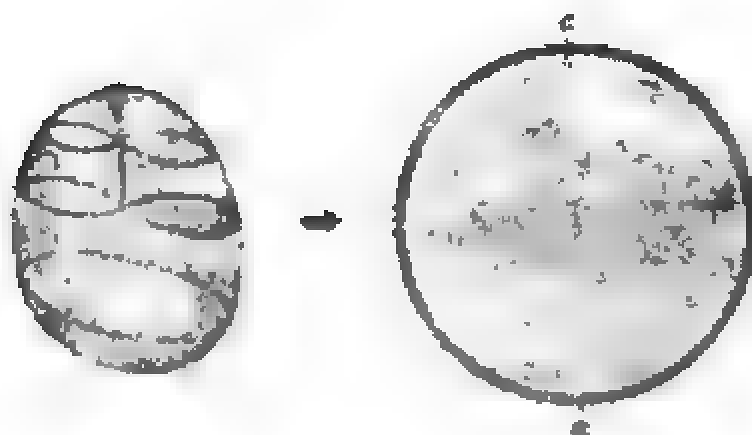


图 10-4

所以可用多边形表 aa^{-1} 作为球面的标准形。对于环面来说，如图 10-3 那样，用平面沿着交于一点 o 的两个圆周切开，就能够得到如图 10-3 右边那样的四边形表示 $aba^{-1}b^{-1}$。这就是环面的标准形。射影平面已有图 9-17 那样的四边形表示，但是如图 10-4 那样的二边形表示尤为简单，所以可用 aa 作为射影平面的标准形。

§2 连通和

例如，我们考虑环面 T_1^2 和 T_2^2。在 T_1^2 和 T_2^2 上分别取圆盘 D_1 和 D_2，圆盘的边界为圆周，设它们为 c_1 和 c_2。若从 T_1^2 和 T_2^2 去掉 D_1 和 D_2 的内部，就能够得到分别以 c_1，c_2 为边界的带

洞的环面，设它们为 $T_1^{2'}$ 和 $T_2^{2'}$. 因为 $T_1^{2'}$ 和$T_2^{2'}$ 的 边界分别是圆周 c_1，c_2，所以可看做把 c_1 映为 c_2 的同胚映射 $h: c_1 \to c_2$. 于是，所谓 T_1^2 和 T_2^2 的连通和，就是在 h 之下把 $T_1^{2'}$ 和 $T_2^{2'}$ 的 c_1 和 c_2 迭合起来所得到的商空间，并用记号 $T_1^2 \# T_2^2$ 表示. 这个问题直观地来说，就是在 R^3 中考虑两个互不相交的环面 T_1^2 和 T_2^2，从它们各去掉一个开圆盘，然后把它们的边界 c_1 和 c_2 用导管连结起来. 也就是，两个带洞的炸面圈的表面是 $T_1^2 \# T_2^2$.



图 10-5

在这里，要提到一件麻烦的事，就是根据圆盘 D_1 和 D_2 的选法以及同胚映射的取法可能得到其它的连通和，而且应该证明从拓扑学的角度它们都是相同的，都是同胚的闭曲面. 但是，这是技术性很强的问题，所以略去对它们的严密证明. 我们已如上确定两个环面的连通和，但这不限于环面. 一般地，对于两个闭曲面 F_1，F_2 同样可以确定它们的连通和 $F_1 \# F_2$，它仍然是一个闭曲面.

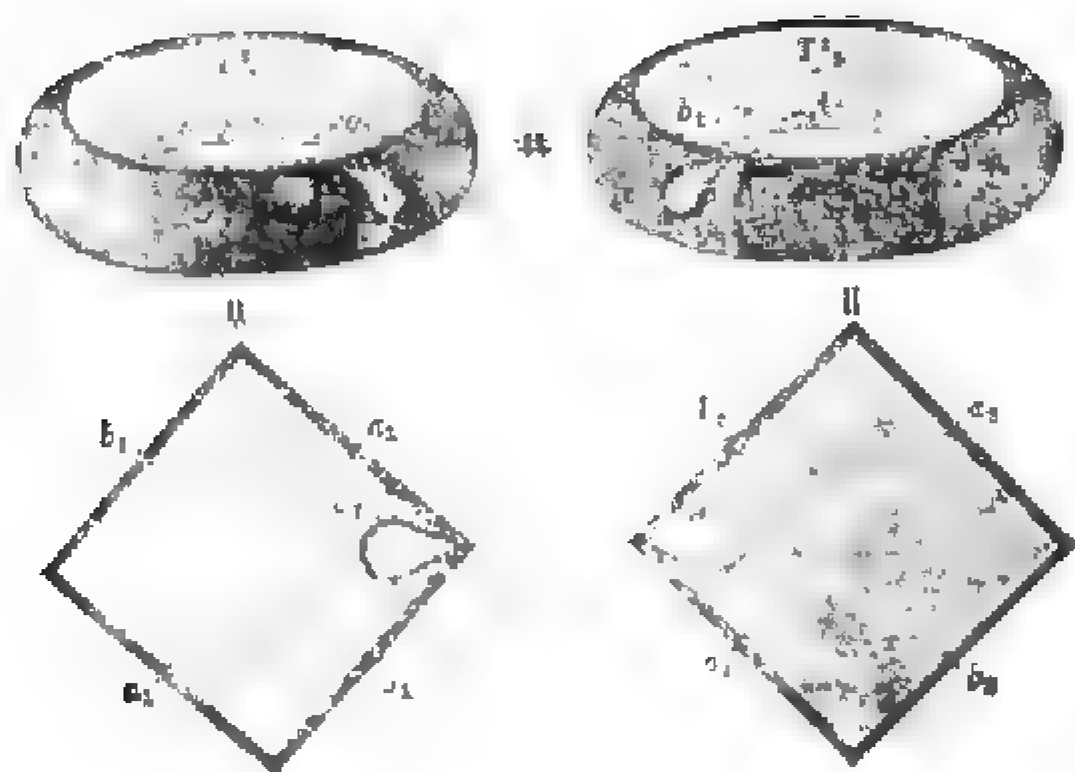


图 10-6

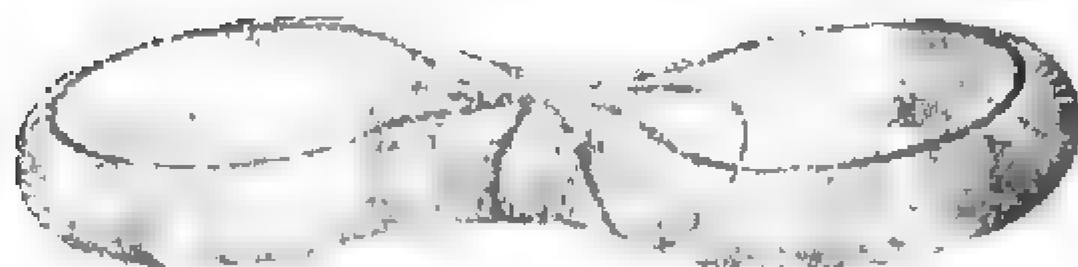


图 10-7

若作出两个环面 T_1，T_2 连通和的多边形表示，就象图 10-6，10-7 那样。

同样，若作出两个射影平面 P_1^2，P_2^2 的连通和 $P_1^2 \# P_2^2$，就得到图 10-9 那样的标准形。

由上述例子可知，一般地，n 个 $(n \geqslant 1)$ 环面的连通和是具有迭合关系的 $4n$ 边形

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1},$$

n 个射影平面的连通和是具有迭合关系的 $2n$ 边形

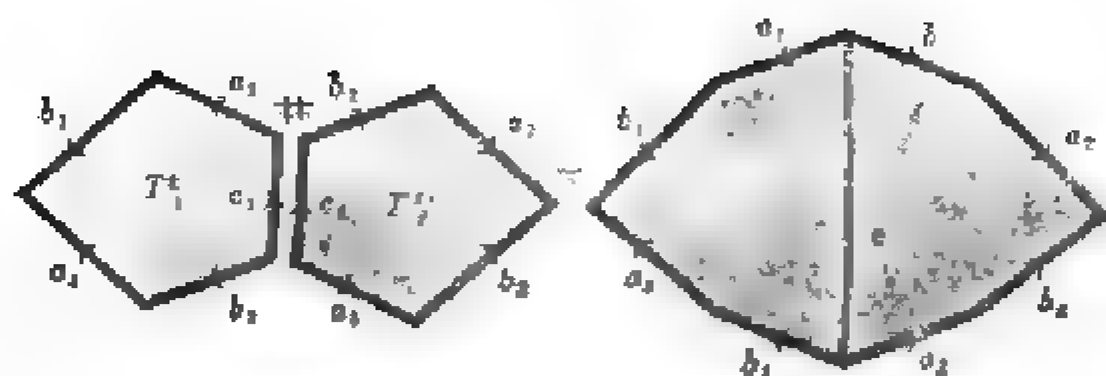


图 10-8

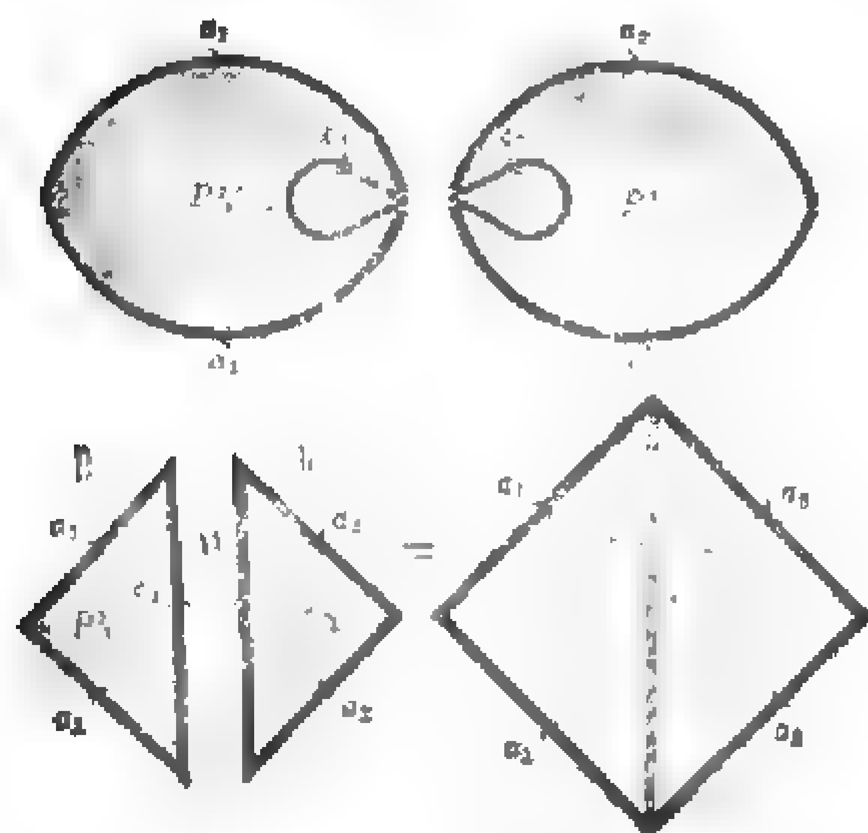


图 10-9

$$a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n.$$

根据连通和的这样运算，能够得到许多闭曲面，实际上所有的闭曲面都是这样连接而成的。就是说，下面的曲面拓扑学的主要定理是成立的。

闭曲面的分类定理 I 任何一个闭曲面必和球面、n 个（$n\geqslant 1$）环面的连通和以及 n 个（$n\geqslant 1$）射影平面的连通和

之一同胚。

闭曲面的分类定理 II 球面，n 个($n \geqslant 1$) 环面的连通和，n 个($n \geqslant 1$)射影平面的连通和，在拓扑学的意义下，它们是相互不同的闭曲面。

如何证明这些分类定理，在讨论之前，需要稍做准备。

§3 闭曲面的三角剖分

闭曲面就是把一个多边形的适当对边迭合起来所得到的商空间。也就是，一个闭曲面，可以把它剖分成若干三角形。这时，三角形的边也可以是曲线段，三角形本身也可以是弯曲的面，但其中两个三角形，或者不相交，或者只有一个顶点，或者只有一条边与另一个相交。因而，不容许象图 10-10 那样的交法。

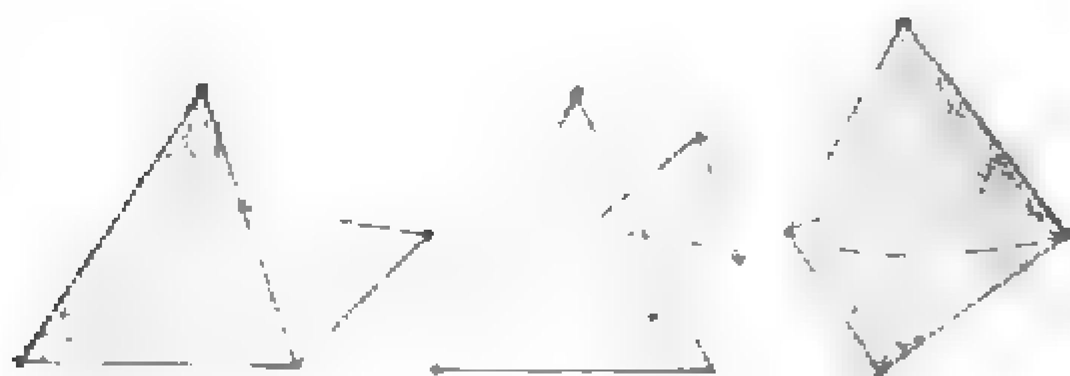


图 10-10

确切地说，所谓闭曲面 F 的三角剖分，是指和三边形同胚的有限集族 T_i，即

$$K = \{T_1, T_2, \cdots, T_n\},$$

而且

$$\bigcup_i T_i = F。$$

另外，因为各 T_i 是和三边形同胚的，所以都有三个顶点，三条边。但对于任何三边形 T_i，T_j 来说，或者 $T_i \cap T_j$ 是 $\varnothing$，

或者有一个公共点，或者有一条公共边．总之，可说明如下．

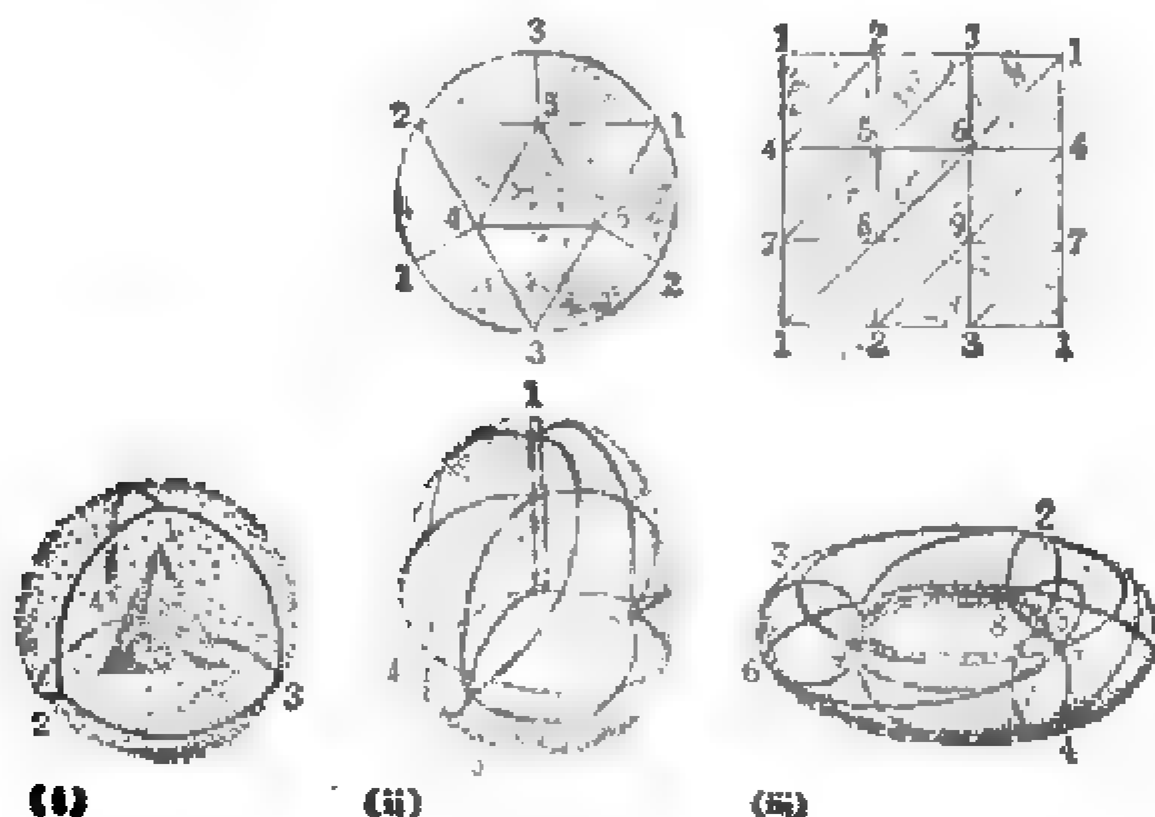
闭曲面的三角剖分定理Ⅰ 任意闭曲面总能三角剖分．

这个定理是在1925年，首先由T. 拉多(Radó)给出严格证明的．对于(带边的或不带边的)曲面、开曲面，类似的定理也是成立的．

根据三角剖分定理，闭曲面可以切割成有限个三边形，反过来说，闭曲面也可看做象拼图游戏那样由这些三边形组合而成的．闭曲面的三角剖分，如果指出它的各三边形的顶点，就完全确定了．

图10-11(i)是表示球面S^2三角剖分的例子．这个剖分是利用S^2和四面体同胚作成的，所以它是由四个三边形123，134，142，234，构成的．

图10-11(ii)是射影平面P^2的一个三角剖分．它是由六个顶点和下列10个三边形构成的：



(i) (ii) (iii)

图 10-11

124，245，235，351，156，162，263，364，341，456.（需要注意，对径点是同一顶点，圆盘边界上的边都要迭合起来.）

图 10-11 (iii) 是环面的一个三角剖分，它是由 9 个顶点和下列 18 个三边形构成的：

124，245，235，356，361，164，457，578，568，

689，649，497，781，812，892，923，973，731.

由上述简单三角剖分的例子，可猜想到下列定理.

剖分定理 II 设闭曲面的任意三角剖分为K：

(1) 任何三边形的边恰好都是K的某两个三边形的边；

(2) 对于不同的三边形σ^2，τ^2，总能取到使

$$\sigma^2=\sigma_0^2, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_p^2=\tau^2$$

而且$\sigma_i^2 \cap \sigma_{i+1}^2$是$\sigma_i^2$和$\sigma_{i+1}^2$的公共边的三边形列；

(3) 对于任何顶点v都能够作成含有v的K的三边形$T_0, T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}, T_n=T_0$，而$T_i$和$T_{i+1}$有一个公共边.

这个定理可根据如下事实证明：曲面上的点，不论是三边形的内点、边上的点、还是顶点都有和开圆盘同胚的邻域.

对于闭曲面，当给与它一个三角剖分K时，把它的边和三边形剖分成更小的边和三边形，就能够得到另外的三角剖分(参照图 10-12).



图 10-12

一般地，对于一个闭曲面 F，当给出它两个三角剖分 K，L 时，若 L 的任何三边形都含于 K 的某三边形，则称 L 为 K 的**细分**.

关于闭曲面的三角剖分，被称为**基本猜想**的下列定理是由K.帕帕克勒科波洛斯（Papakgriakopoulos）给予证明的.

剖分定理 III（基本猜想定理） 如设闭曲面 F 的任意两个三角剖分为 K_1，K_2，则它们存在下列的各自的细分 L_1，L_2.

存在双射 $L_1 \to L_2$，使 L_1 与 L_2 之一的三边形，包括它的边和顶点在内，分别与另一三边形以及它的边和顶点相对应，而且在 L_1 中的任意两个三边形 T_i 与 T_j 包括边和顶点在内 $T_i \cap T_j$ 为 $\varnothing$，在 L_2 中与之对应的两个三边形包括边和顶点在内也为 $\varnothing$.

也就是，L_1 与 L_2 有相同的结构，这时把三角剖分 L_1 与 L_2 叫做**同构的**.

§4 欧拉示性数

分类定理 I 只好割爱，现在我们来讨论分类定理 II.

根据分类定理 I 已知，闭曲面或者是球面，或者是环面的连通和，或者是射影平面的连通和，但是它们中的任何一种与另一种是否是不同的曲面，仍有疑问. 为了知道它们在拓扑学意义下是不同的，需要确定拓扑空间的一种拓扑的尺度，用这种尺度来测定它们是不同的. 这种拓扑的尺度之一就是我们在这里要讨论的欧拉示性数. 当已给曲面 F 时，一般地，可取得它的三角剖分 K，设

$$v = K \text{ 的顶点个数},$$
$$e = K \text{ 的边的个数},$$
$$f = K \text{ 的三边形的个数}$$

时，则



图 10-43

$$\chi(F)=v-e+f$$

叫做曲面 F 的**欧拉示性数**或叫做**欧拉标数**。

关于球面 S^2，环面 T^2，射影平面 P^2，若用图 10-13 那样的三角剖分计算，则 $\chi(S^2)=2, \chi(T^2)=0, \chi(P^2)=1$。欧拉示性数，即便用其他三角剖分时，它的数值是相同的。就是说，对于细分，χ 是不变的。根据三角剖分定理 III，对于任何两个三角剖分来说，总存在它们的三边形、边、顶点的个数是相同的(它们的对应是保存三边形、边、顶点连结关系的一一对应)细分，所以可知 χ 是曲面的拓扑性质，或者说是拓扑不变量。而且连通和与欧拉示性数有下列关系。当 F_1，F_2 是闭曲面时，则有

$$\chi(F_1 \# F_2)=\chi(F_1)+\chi(F_2)-2.$$

这个等式由下述事实是容易明白的。取 F_1，F_2 的三角剖分 K_1，K_2，从每个中仅取一个三边形 σ_1，σ_2，把它们去掉再做连通和。于是得到 $F_1 \# F_2$，在它的三角剖分中，

$F_1 \# F_2$ 的顶点数 $=F_1$ 的顶点数 $+F_2$ 的顶点数 -3，

$F_1 \# F_2$ 的边数 $=F_1$ 的边数 $+F_2$ 的边数 -3，

$F_1 \# F_2$ 的三边形数 $=F_1$ 的三边形数 $+F_2$ 的三边形数

-2.

若利用上述公式，计算各曲面的欧拉示性数，就得出下表中的结果.

闭　曲　面	欧拉示性数
球　面	2
n个$(n\geqslant 1)$环面的连通和	$2-2n$
n个$(n\geqslant 1)$射影平面的连通和	$2-n$

由上表可以看出，当 M 可定向时，$\chi(M)$ 是 2 或 $2-2n$ $(n\geqslant 1)$，而它的所有值都是不同的；当 M 不可定向时，$\chi(M)$ 是 $2-n(n\geqslant 1)$，而它的所有值都是不同的.

由此可得如下结果.

闭曲面的分类定理 III 两个闭曲面 F_1 和 F_2 同胚的充分必要条件是，它们的欧拉示性数相等，而且都是可定向的或都是不可定向的. 因此，球面、n 个 $(n\geqslant 1)$ 环面的连通和、n 个 $(n\geqslant 1)$ 射影平面的连通和，在拓扑学的意义下，都是不同的闭曲面.

非球面的闭曲面 F 是 n 个$(n\geqslant 1)$环面的连通和，或者是 n 个$(n\geqslant 1)$ 射影平面的连通和. 不论哪种情况，连通和的个数都叫做该曲面的**亏格**，并用 $g(F)$ 表示. 球面的亏格约定为 $g(S^2)=0$. 于是，亏格和欧拉示性数有下列关系.

$$g=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-\chi) & \text{可定向的情形,}\\ 2-\chi & \text{不可定向的情形.}\end{cases}$$

由此可见，闭曲面或者是可定向的，或者是不可定向的，都能够根据它们的亏格进行分类.

分类定理，如果用图来说明，即

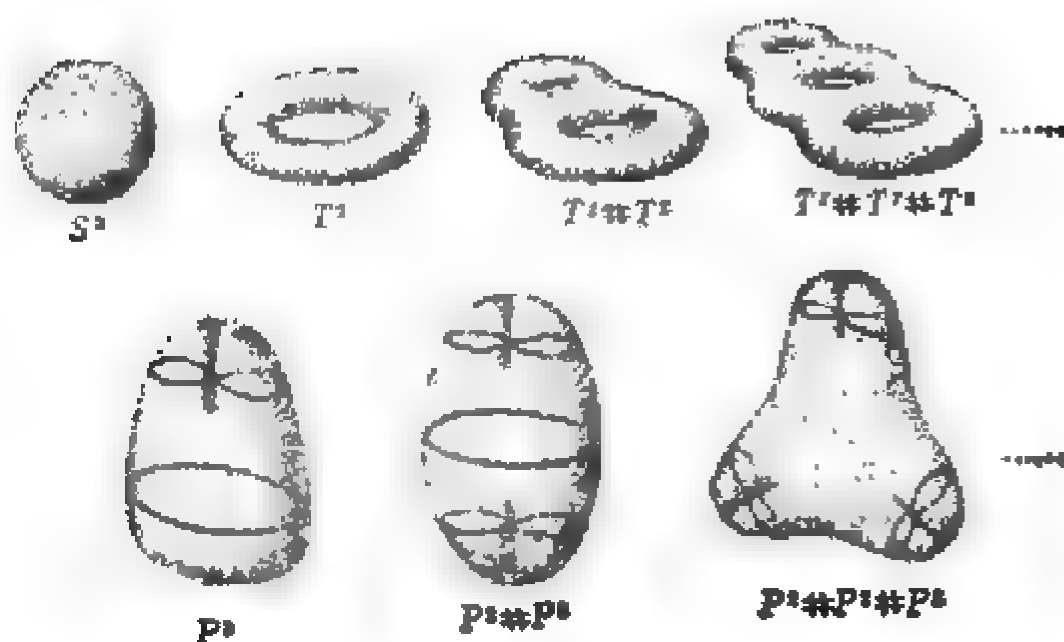


图 10-14

在我们面前的所有物体的表面都是可定向的曲面，若从曲面的多种性来看，这就太少了．其原因可认为有两种．第一是，这样的曲面是同胚类的一种代表，它把各种外观不同形状的曲面归类来表示．例如，射影平面 P^2 和环面 T^2 的连通和，它是代表上述哪一种曲面呢，我们来考虑一下这个问题．肯定地说，$P^2 \# T^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$，也就是，在一般情形中，若曲面 P^2 加上一个环面，就能分解为两个 P^2．因此，如上述分类定理那样，没有把 P^2 和 T^2混在一起．

现在我们再考虑两个射影平面的连通和，正如前边讨论的那样，它是以 $a_1a_1a_2a_2$ 为标准形的曲面，但由图 10-15 可知，

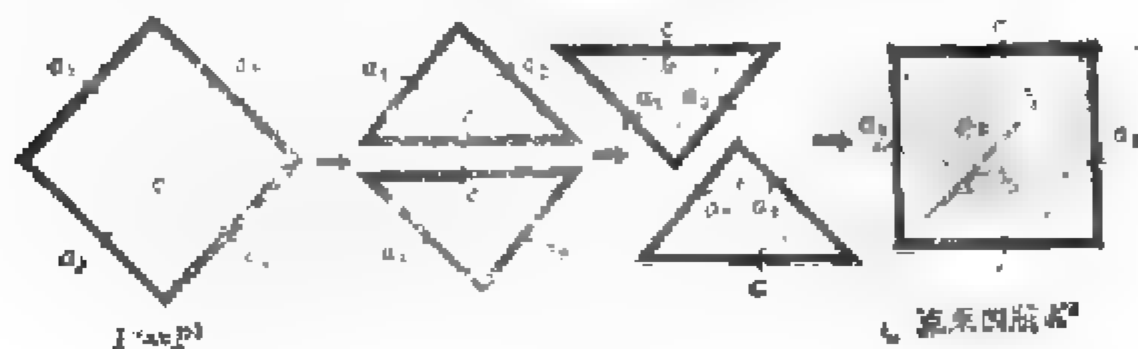


图 10-15

$P^2 \# P^2$ 实际上是克莱茵瓶 K^2。从而，$P^2 \# T^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$，也可表为 $P^2 \# T^2 = P^2 \# K^2$。如前所述，若从 P^2 去掉圆盘就成为麦比乌斯带。如果麦比乌斯带的边界圆周与 T^2, K^2 去掉圆盘的边界圆周（如图）迭合起来，就可得出 $P^2 \# T^2$ 和 $P^2 \# K^2$。如图 10-16 那样，暂且把 T^2, K^2 由 AA' 分开，可以看做带洞的圆柱的一部分，剩下的部分依次是环面和克莱茵瓶。带洞的圆柱部分与麦比乌斯带的边界的圆周迭合，若如图 10-17

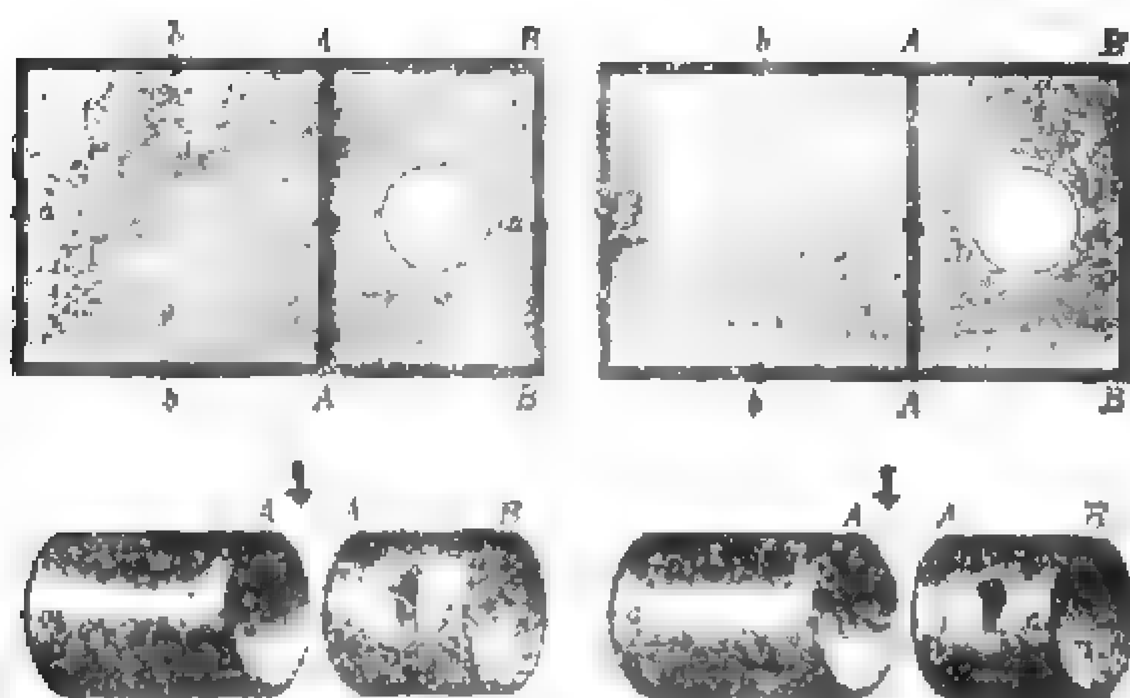
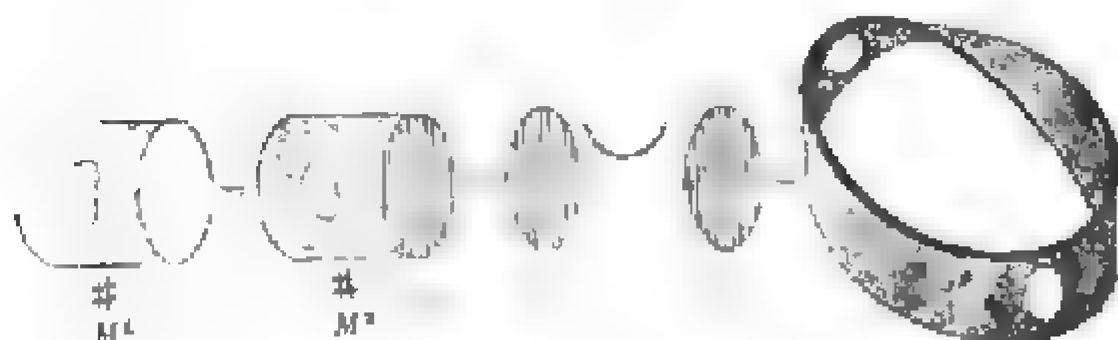
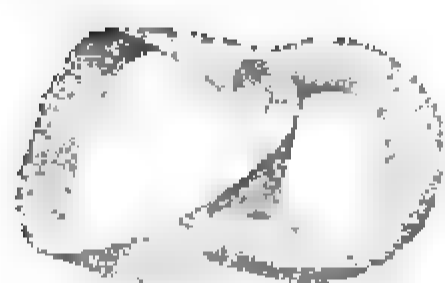


图 10-16

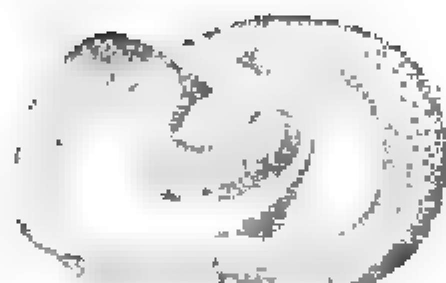


带洞的柱面 $\# M =$ 带洞的球面 $\# M - 2$ 圆盘 $= M - 2$ 圆盘

图 10-17

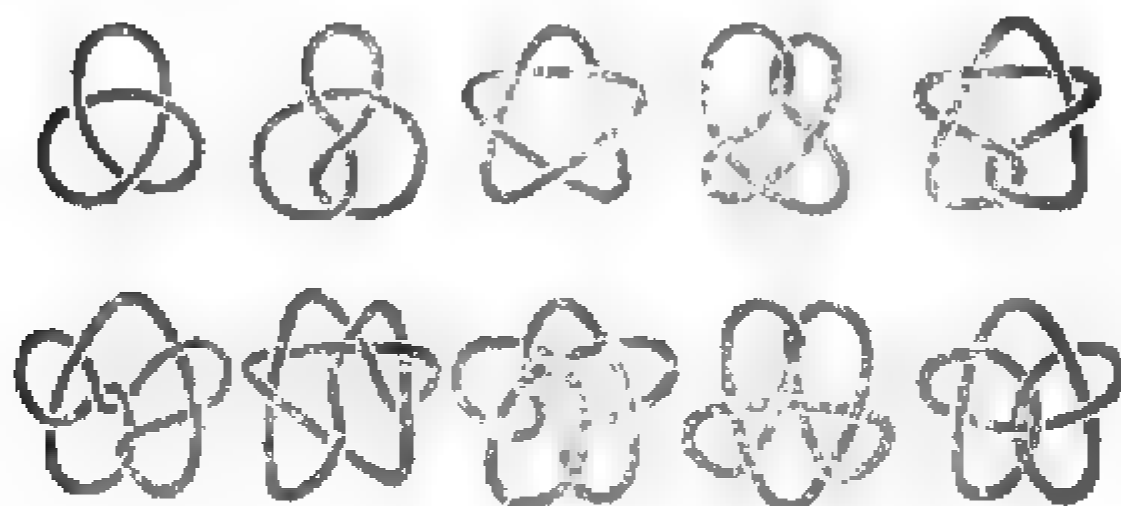


$M \# T^2$



$M \# K^2$

图 10-18



(i)



(ii)

圆周 S^1 的各种嵌入

图 10-19

那样考虑，实际上是挖了两个洞的麦比乌斯带．因此，若它分别与剩下的部分迭合，即 $M \# T^2$，$M \# K^2$ 的迭合之后，就得到图 10-18 那样的曲面．总之，T^2 的情形和 K^2 的差异仅

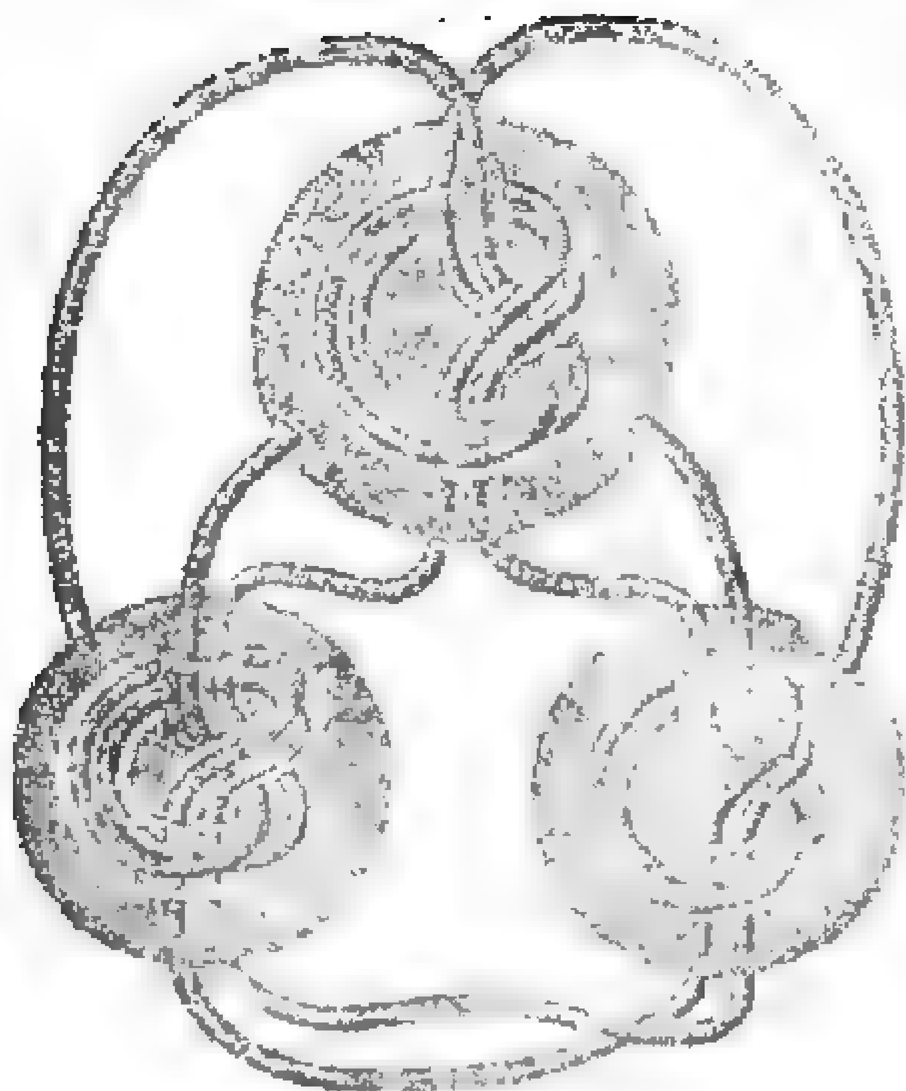


图 10-20

是剩下的圆柱与 M 的两个洞迭合时的方向不同．但是，若 $M \# T^2$ 的圆柱的一端沿麦比乌斯带转一周，圆周的方向变为相反的，恰好是 $M \# K^2$．也就是，虽然 $M \# T^2$ 和 $M \# K^2$ 在外观上是不同的，实际上它们是同胚的曲面．因而，$P^2 \# T^2$ 和 $P^2 \# K^2$ 也是同胚的．

第二是，在三维空间 R^3 中，我们通常见到的曲面，实际上是把曲面和 R^3 同时考虑而看到的．也就是说，在三维空间 R^3 中还考虑到 F 在 R^3 里的位置关系．例如，我们取一维流形的代表圆周 S^1 来考察一下．S^1 在平面上画出来的是普通的圆周，但在 R^3 中它的画法是无限多的．图 10-19(i)，(ii) 都

是在 R^3 中所画出来的圆周 S^1，但是哪一个都看不出来象 S^1。特别是图(ii)，可能认为是一种特别奇妙的空间，但仔细观察可知，它也是圆周，确切地说，它们都表示由圆周 S^1 向 R^3 的各种不同的嵌入，把它们都称为扭结。

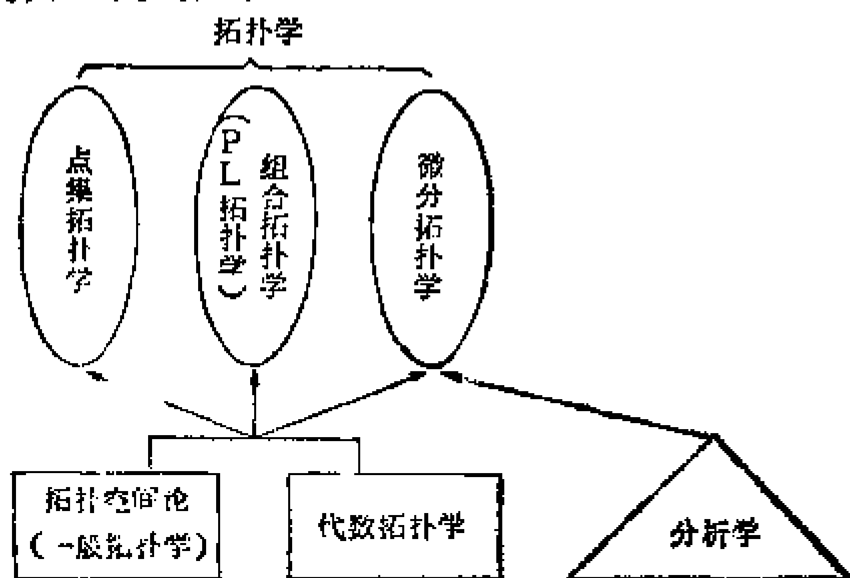
就曲面来说，例如上图是亏格为 3 的曲面的嵌入，象这样的嵌入可以看做由一个同胚类作出的几乎无限多的嵌入，它们都是我们对于曲面的多样性的表示。上述曲面是神户大学铃木晋一先生给出的。

第十一章　拓　扑　学

在第八章中已经讲过，拓扑学是研究空间拓扑性质的数学分科．在那里所谈的实际上是在第六、七两章中所叙述的拓扑空间和度量空间以及连续映射等等拓扑性质，把这些理论归纳起来，称为拓扑空间论或一般拓扑学，它是拓扑学的基础部分．这里所谓"拓扑学的"，如所周知，就其初步的表现似乎可以说，一般拓扑学是"现代数学"的基础之一．现代数学可以看做由一般拓扑学和本书几乎未涉及的代数系理论这两大支柱所组成．这就是所以在本书第九章中提出作为拓扑空间典型的流形和在第十章中对二维流形，即曲面拓扑学以及对闭曲面分类定理进行研究的原因．大体上说，到现在为止所涉及的内容都是二十世纪初所得到的结果，我们对曲面叙述完了之后，就对三维流形的分类定理，尤其是对一般的 n 维流形的分类定理进行研究．在这里首先遇到的问题是对曲面分类定理II怎样表示的问题．也就是，球面与环面，它们的欧拉示性数分别为 2 和 0，从而得到球面与环面不同胚的结论．可是对于三维闭流形 M^3 如果可定向，则欧拉示性数 $\chi(M^3)$　0．因此，就要求比欧拉示性数更精确的衡量拓扑的标准．于是，首先考虑到的是作为空间同调的拓扑不变量．这种理论是用所谓群的代数系来表示空间性质的方法，现在已经接近于完备．但是，对三维流形的分类，仅利用同调还不够充分．因此，从 1930 年以来，考虑了比同调更精确的标准，即所谓同伦，它也是利用群的理论．同调群的运算是可交换的阿贝尔(Abel)群，但是，同伦群，特别是作为标准的空间基本群或叫庞加莱群，

一般不是阿贝尔群，它的结构非常复杂．这样，把同调、同伦的空间理论看做用代数系为工具的拓扑，因此，称之为**代数拓扑**．大约在二十世纪五十年代达到了完备的程度．

以同调和同伦为工具，对于高维流形进行了深入的研究，高维流形方面得到了很好的结果．从拓扑的方法上，拓扑学大体上可分为三个分支．一个是用已有的点集合论的方法，即把它看做是拓扑空间论的直接扩张的拓扑学．这方面以波兰的华沙学派、苏联的亚利山大洛夫（Александров）为中心的研究俱乐部以及美国由 R. L. 莫尔（Moore）所领导的 Bing-Moise 学派等最为活跃．其次是在很久以前，拓扑学已由庞加莱提出．最近还在迅速发展的有组合拓扑学，也叫 PL（Piecewise linear）拓扑学．英国以 J. H. C. 怀特海德（Whitehead）为创始人的季曼学派和美国的普林斯顿学派对此进行了研究．第三是从 1950 年到现在，被数学界所重视的微分拓扑．以美国的J.米尔诺(Milnor)，S. 斯梅尔（Smale）以及法国的托姆为代表的很多拓扑学家正在进行研究．在上述各种拓扑学中，并没有提到日本人的研究活动，然而当然有很重要的研究成果(如有兴趣，可参看野口宏著《数学家的群象》，河出书房)．这些拓扑的研究可用框图表示如下：



一般地把这三种拓扑学统称为拓扑学（对这方面有兴趣的人，可参看拙著《怪球面》，钻石出版社）.

在本章中，将论述 PL-拓扑学中的多面体和微分拓扑学的微分流形.

§1 向量

现在把 n 维实数空间 R^n 确定为 n 个实数直线 R 的直积空间，在 n 实数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所表示的点 x 的集合中引入拓扑，因此，可以把它看做几何的对象.

但是，实数直线 R 不仅具有拓扑结构而且具有加法 $+$、乘法 $\times$ 的代数运算. 因此，R^n 不仅是拓扑空间，而且在其中也要考虑与 R 类似的运算. 总之，把 R^n 看做可以实行运算的体系，这是我们一贯的思想方法.

在这里把 R^n 的任意点 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 改换意义而叫做**向量**. 正确地叫做 n-维(实数)向量. 按传统的记法，向量 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 记做 $\boldsymbol{a}$. 所谓传统记法是把普通向量看做用箭头表示方向的 R^n 中的有向线段. 约定经平行移动(连方向在内)重合的二有向线段表示同一向量. 如果有向线段的终点的坐标为 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，始点的坐标为 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，则 $(b_1-c_1, b_2-c_2, \cdots, b_n-c_n)$ 恰好是上面所确定的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 这种表示方法使向量比较直观和方便.

关于向量

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2\cdots, a_n),\ \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

的加法定义为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n),$$

用带箭头的线段可表示为图 11-1 (i).

这个加法是可交换的，即从图 11-1(ii) 可知

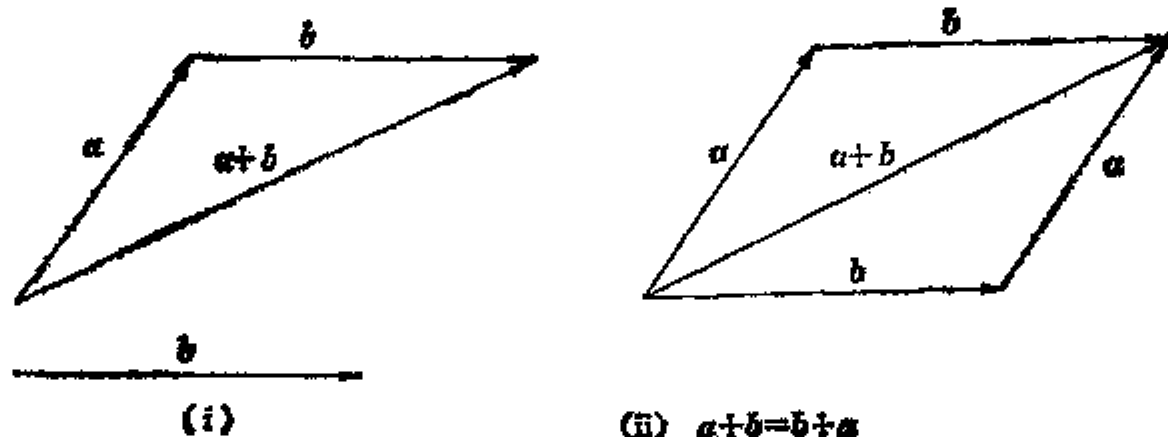


图 11-1

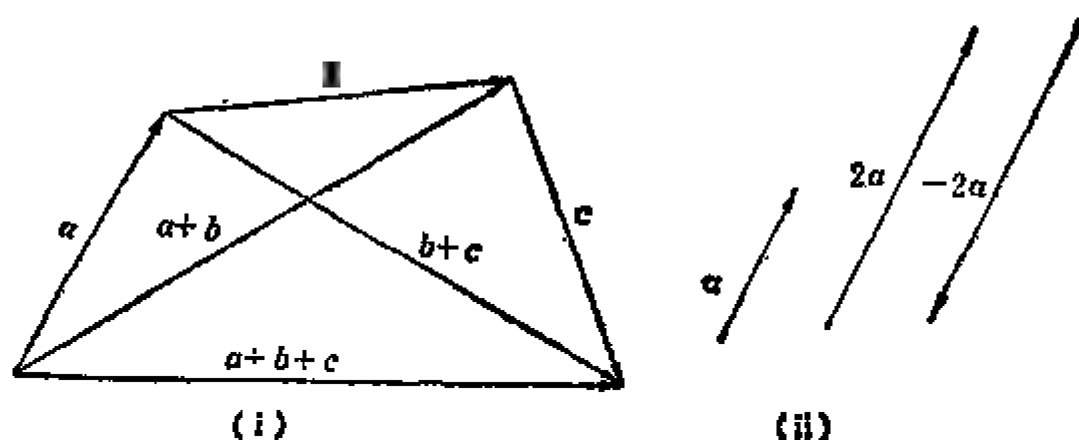


图 11-2

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

当然，从加法的定义也可以看到这是明显的．同样，关于结合律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

成立，这可从开头的定义式以及图 11-2(i) 得到，因此，上式的两边都可以用记号 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 表示．

其次，象前面那样，任取实数(纯量) λ，确定数乘

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n).$$

在这里把 $-1\boldsymbol{a}=(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$，简记做 $-\boldsymbol{a}$，又

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 记做 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 而且把

$$(0,\cdots,0)=\mathbf{0}$$

叫做**零向量**. 把第 i 个数是 1, 其它均为零的向量

$$(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)=\boldsymbol{e}_i$$

叫做 i **单位向量**. 关于数乘, 分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

成立. 从定义出发进行计算或者从图上都易于得到验证.

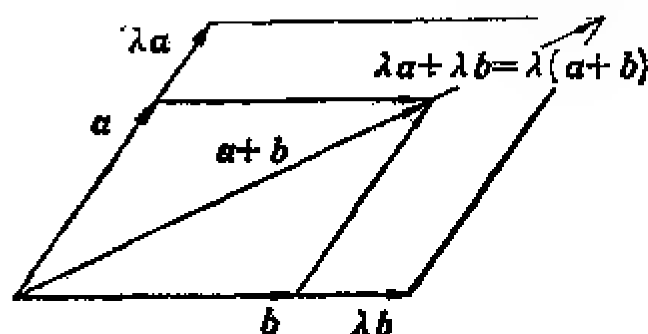


图 11-3

又, 所谓若干个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ **线性相关**, 是指存在全不为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r=\mathbf{0}$$

成立. 例如取 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}$, 由于

$$1\cdot\boldsymbol{a}-1\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-1\cdot\boldsymbol{b}=\mathbf{0},$$

则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}$ 线性相关. 实际上, 把这些向量进行平行移动, 使它们都放在维数小于个数的欧氏子空间上. 上例中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 如图 11-4, 能画在一个平面上.

非线性相关的向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 叫做**线性无关的**, 即存在全不为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$, 使式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r\neq\mathbf{0}$$

成立. 这时, 不论把这些向量怎样平行移动, 包含它们的欧氏空间都恰为 r 维的.

例如取 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,\cdots,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,1,0,\cdots,0)$,

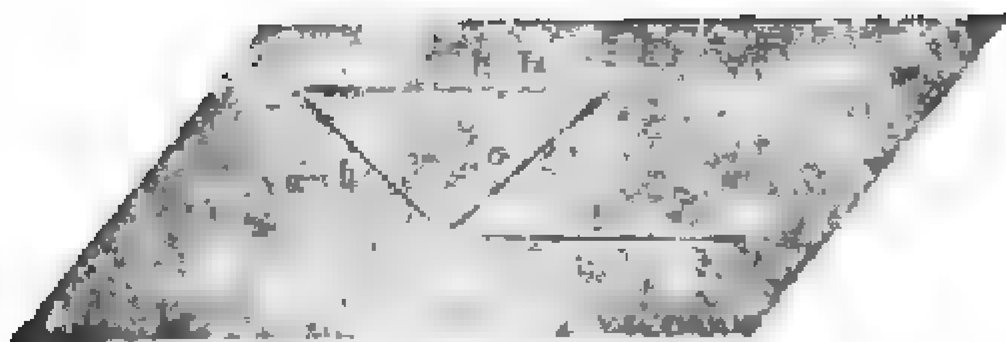


图 11-4

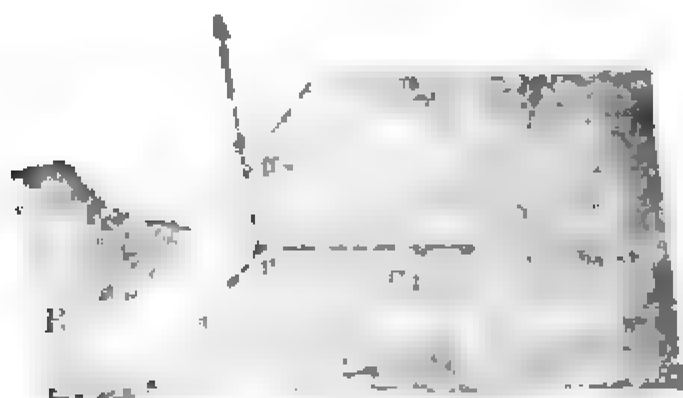


图 11-5

$\boldsymbol{a}_3=(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，而包含它们的欧氏空间是三维的，它们是线性无关的(图 11-5)。

其次，转到向量之间的乘法。如所周知，向量的乘法有内积和外积两种。**内积也叫数量积**，若 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$，则由

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

来确定。也可以把它记做 $\boldsymbol{ab}$。由于 $\boldsymbol{ab}$ 不是向量而是实数(纯量)，因此而命名(在这个意义下，它不是由向量来确定向量的运算)。从定义可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)以及 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律)成立。特别是，因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+\cdots+a_n^2=(\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2})^2,$$

所以 $\boldsymbol{a}^2$ 是表示向量$\boldsymbol{a}$的有向线段长度的平方。这个有向线段

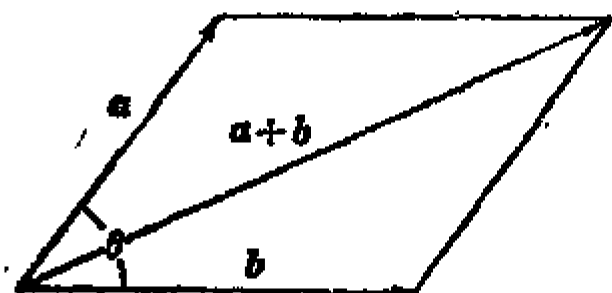


图 11-6

的长度叫做向量$\boldsymbol{a}$的长度，用记号$|\boldsymbol{a}|$来表示，这时

$$\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2.$$

一般地，若设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的交角为θ，由于

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

在向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$所构成的图 11-6 的三角形中，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

特别是向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$正交。因为$\cos\frac{\pi}{2}=0$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。对于单位向量$\boldsymbol{e}_i$有

$$\boldsymbol{e}_i^2 = 1,\ \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = 0,\ i\neq j.$$

其次，由于乘法**外积**$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$确定的是向量，所以叫向量积。这种运算在本书中不常遇到，而仅就三维向量介绍它的大意。对于三维空间的向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1).$$

当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$线性相关时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。线性无关时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$所确定的平面垂直，因此，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$有右旋坐标系的方向，而且用长度为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$的线段来表示。$\theta$是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角。

关于单位向量，有

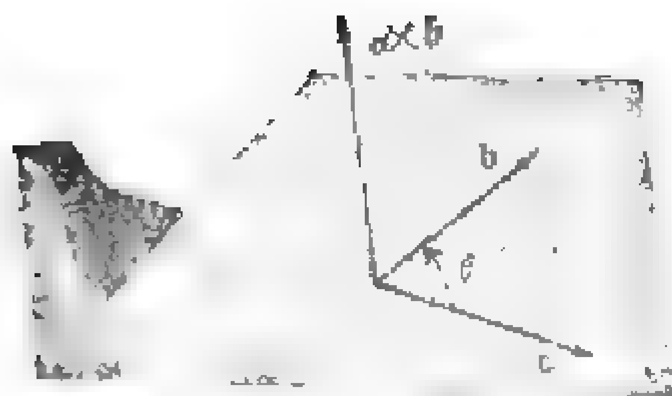


图 11-7

$$e_1 \times e_2 = e_3,\ e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2.$$

$$e_i \times e_i = 0,\ i = 1, 2, 3.$$

因此

$$a \times b = -b \times a$$

是较复杂的运算。

§2 多面体

同调的理论是为了把空间的整体结构用代数系的群来表示，因此，把曲面进行三角剖分，实际上是把曲面看做由三角形经过适当的组合而构成的空间。这是第十章的基本思想方法。首先把三角形经过弯曲或扭曲变形为拓扑的圆盘。因为圆盘是已经列举过的拓扑空间中具有最单纯结构的对象，它是我们最熟悉的空间。研究曲面，实际上是把这种圆盘进行这样或那样的组合，这种“组合”是重要的问题。因为，以同样的三角形为素材，由于组合方法的不同而得到不同的曲面。这种组合方法利用群来表示就得到同调群。因此，在第十章中所介绍的欧拉示性数就是这种同调群的一种量。

在本书中，从同调本身出发，对于由这样单纯空间经组合所构成的空间——多面体给以阐述。

对于曲面，取三角形作为它的构成单位。准确地说三角

形的边的线段、顶点也是它的构成单位．把点、线段、三角形分别叫做 0 维球、1 维球、2 维球．因此，一般地，空间的构成元素可以看做 n 维球．为使它能由简单模型进行组合，随客观情况可以利用圆盘或弯曲三角形．由于三角形比较标准，因此称之为**单形**．以 σ 来表示，如图 11-8．

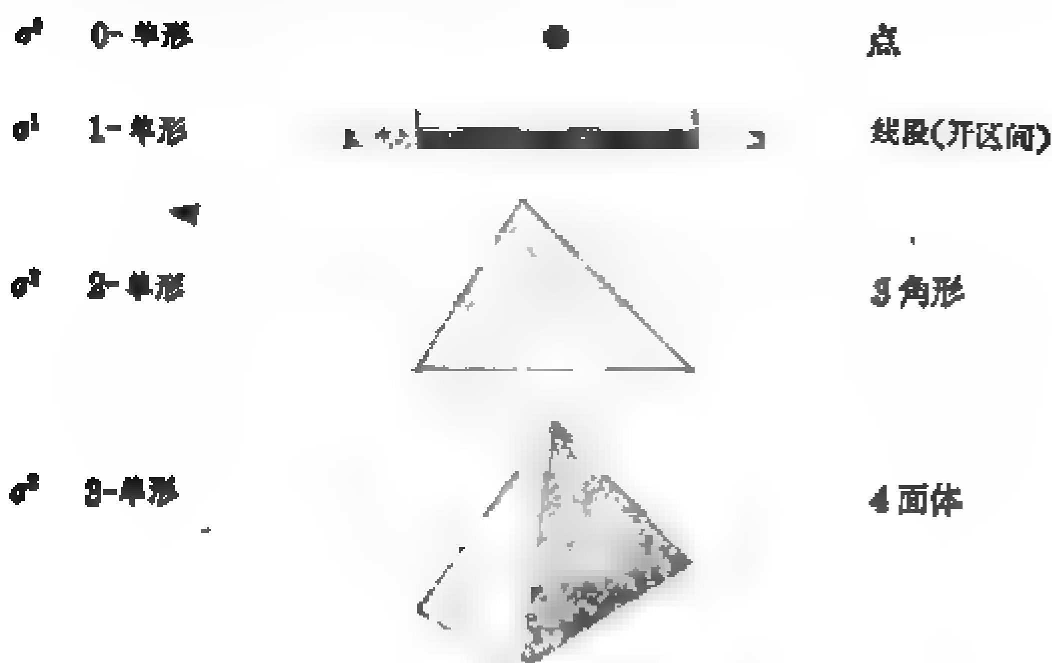


图 11-8

从例子可以看到，$n \geqslant 4$ 以上的 n-单形用眼睛是看不到的，只有 1-，2-，3-单形可以看得见，n-单形一般地是用数学来定义的，这是个困难．为克服这一困难，利用前面已经讲过的向量比较方便．

一般地，在 R^n 中的 $r+1$ 个线性无关向量 $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_r$，如同前面说过的，它们含于 R^{r+1} 中．首先从 $r=1$ 说起，如图，把向量 $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_1$ 的始点放在点 o 上，设 $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_1$ 各表示它的终点，即把 $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_1$ 看做位置向量．这时，以 $\boldsymbol{a}_0$ 终点为始点，以 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点为终点的向量是 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0$．设区间 $[\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1]$ 的任意点为 $\boldsymbol{x}$，点 $\boldsymbol{x}$ 的位置向量用 $\boldsymbol{a}_0+t(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0)$ 表示．这

里的 t 是线段的比 $[a_0, x]:[x, a_1]$，且 $0 \leqslant t \leqslant 1$，当 $t=0$ 时，$x=a_0$；当 $t=1$ 时，$x=a_1$。

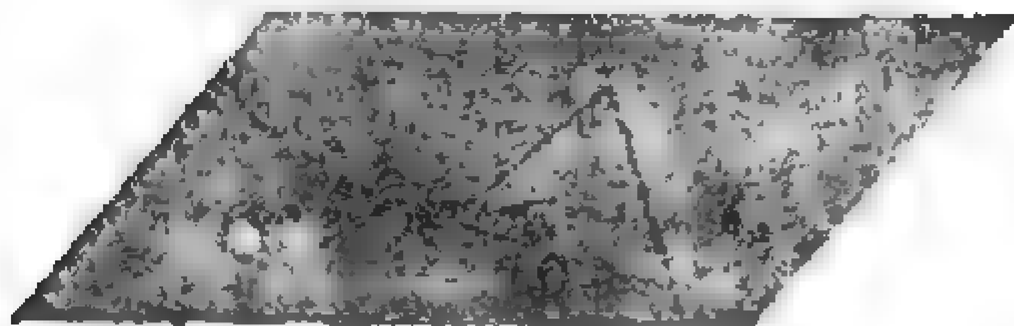


图　11-9

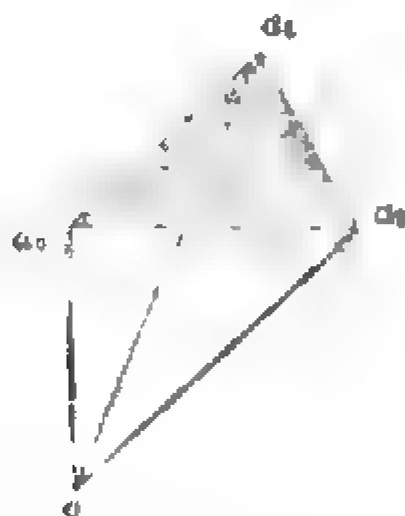


图　11-10

即由点 a_0，a_1 所确定的 1-单形用

$$\{x|x=a_0+t(a_1-a_0),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

来表示。把上式变形，得

$$\{x|x=(1-t)a_0+ta_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$$
$$=\{x|x=t_0a_0+t_1a_1,\ t_0+t_1=1,\ t_0,\ t_1\geqslant 0\}.$$

同样地，三个线性无关向量 a_0，a_1，a_2 的终点所确定的 2-单形用

$$\{x|x=t_0a_0+t_1a_1+t_2a_2,\ t_0+t_1+t_2=1,\ t_0,\ t_1,\ t_2\geqslant 0\}$$

表示。

因此，一般地 r-单形 σ^r 是由 $r+1$ 个线性无关的向量 $a_0, a_1, \cdots, a_r$ 的终点所确定的

$$\sigma_r = \left\{x \,\middle|\, x = \sum_{i=0}^{r} t_i a_i,\ \sum_{i=0}^{r} t_i = 1,\ t_i \geqslant 0\right\},$$

即 R^n 的子空间。

$t_0, t_1, \cdots, t_r$ 叫做 r-单形 σ^r 的点 x 的**重心坐标**。因此，

$$t_0 = t_1 = \cdots = t_r = \frac{1}{r+1}$$

所对应的点叫做 σ^r 的**重心**。

当 $r > 0$ 时，

$$\left\{x \,\middle|\, x = \sum_{i=0}^{r} t_i a_i,\ t_i = 0,\ t_0 + \cdots + t_{i-1} + t_{i+1} + \cdots + t_r = 1,\ t_i \geqslant 0\right\},$$

即第 i 个重心坐标为 0 的 σ^r 的子集，是从向量组中删除了向量 a_i，它恰好是由 r 个向量 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_r$ 的终点所确定的 $(r-1)$-单形 σ^{r-1}。这样的 $(r-1)$-单形 σ_i^{r-1} 叫做原单形 σ^r 的**边单形**。对于各个 σ_i^{r-1} 都可以这样看，

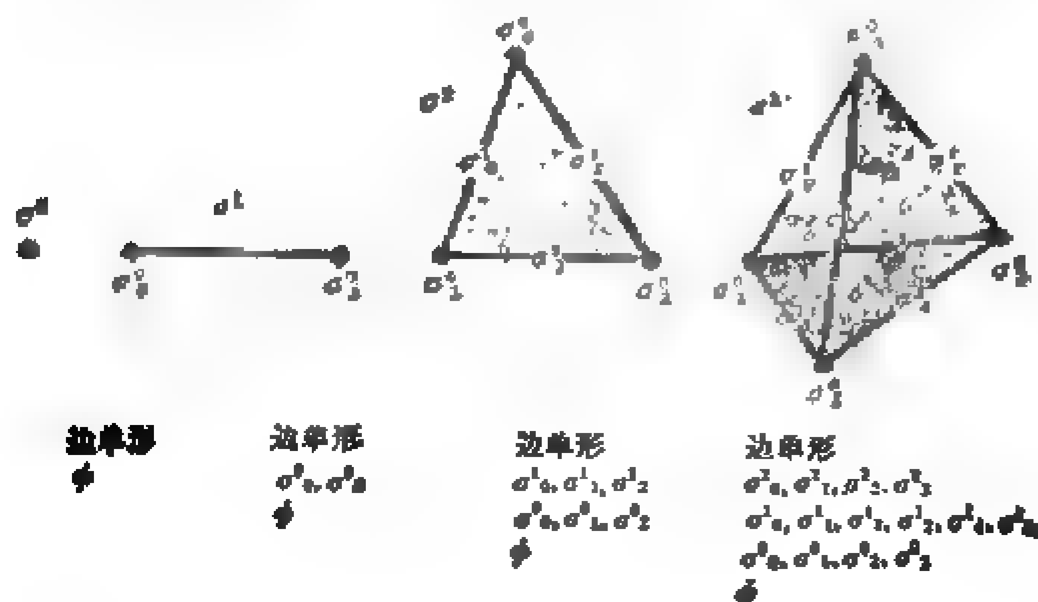


图 11-11

构成它的边单形的是 σ_{ij}^{2}。同样地可以得到其余的各边单形，只是 σ^0 的边单形是空集。这样从 σ^r 开始，依次可得单形 $r-1, r-2, \cdots, 1, 0$，都叫做 σ^r 的边单形。

在 σ^r 的边单形中，0-单形叫做**顶点**。1-单形叫做**边**。2-单形叫做**面**。σ^r 本身随着需要，也叫 σ^r 的边单形。但不是 σ^r 和不是 ϕ 的边单形叫做 σ^r 的**真边单形**。

为使 r-单形更直观，也可以看做 σ^2 是首先取一个 σ^1-1 单形，再取不属于 σ^1 所嵌入的空间 R^1 的一点 p，p 与 σ^1 上各点连结的线段上所有点所构成的空间就是 σ^2。σ^3 也是先取 σ^2，同样地取不在 σ^2 嵌入的空间 R^2 的一点 p，p 与 σ^2 上各点连结线段上所有点所构成的空间就是 σ^3。

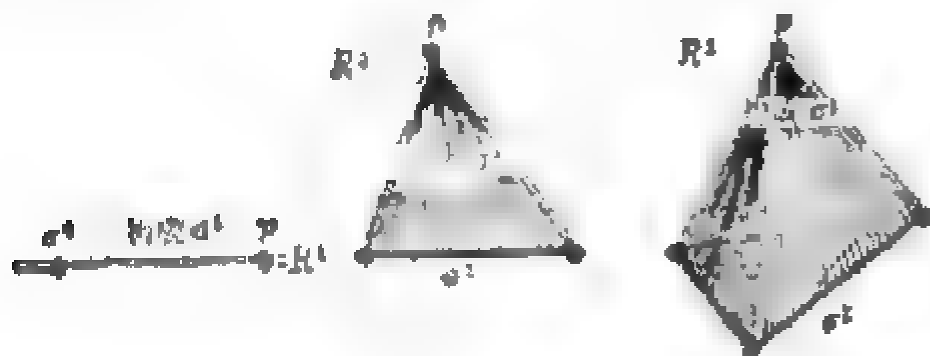


图 11-12

从而可知，对于一般的 σ^r，首先取 σ^{r-1}，设它嵌入于 R^{r-1}，取包含 R^{r-1} 的 R^r，再取在 R^r 而不在 R^{r-1} 的点 p，考虑 p 与 σ^{r-1} 的各点连结的线段族，σ^r 就是这些线段族上所有点所构成的 R^r 的子空间。

这样做可以得到 σ^r 的粗糙的直观形象。

在这里已经得到了构成的元素，将把它们组合起来以确定多面体。在第十章中，已经阐述了曲面的三角剖分，实际上它是一般化了的多面体。首先，我们考虑在 R^n 中满足下列条件的单形的有限集 K。

1. 如果 $\sigma^r \in K$，则 σ^r 的所有边单形也属于 K。

2. 如果 $\sigma^r, \sigma^s \in K$，则 $\sigma^r \cap \sigma^s$ 或为空集，或 σ^r, σ^s 具有共同的边单形。

这样的集合 K 叫做**复形**。复形 K 是单形的集合，若在含于各单形的 R^n 的所有点所构成的 R^n 的子集中，引入 R^n 的诱导拓扑，则得到一个拓扑空间，把它叫做具有复形 K 为三角剖分的**多面体**，用符号 P，Q 等来表示。为了突出复形 K 是三角剖分的，对于这种多面体也用 $|K|$ 来表示。从定义可知 $|K|$ 是维数较高的欧氏空间的子空间。因为在这里没有对复形为曲面的三角剖分的条件（第十章中曲面的三角剖分定理 II）提出要求，所以单形组合的方法比较自由。因此，由复形所确定的多面体，即或是 2 维的，也不一定成为曲面。参看图 11-13。

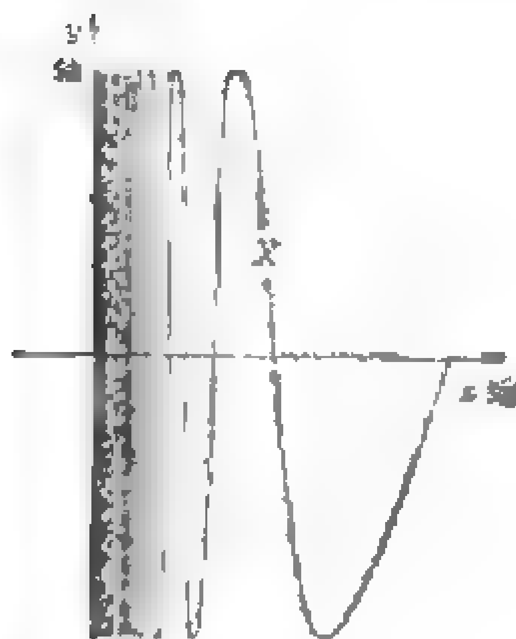


这些多面体都不是流形

图 11-13

含于复形K的单形中的最高维数叫做复形K的维数或多面体的**维数**。

这样所确定的R^n的子空间，多面体P一般地作为任意的R^n的子空间应当具有显著的特殊性质。即，对于它的任意点x，可在P中选取适当的领域，在P中可以收缩为点x 例如下图，子空间X不是多面体。



$$X=\{(0,y)|0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\middle| x>0\right\}$$

图 11-14

这种不是多面体的子空间，一般地具有非常复杂的结构。所谓多面体，我们把它理解为由图形直观概念自然生成的空间可能更好一些。

到现在为止，因为复形以及多面体的构成元素是有限的，所以多面体是紧致可分的度量空间。也可以考虑由无限个单形所构成的复形。在这种情形下，还要在上述条件1，2的基础上再附加条件：

3. 通过K的任意顶点的K的单形的个数是有限的。这个条件叫做局部有限条件。它确认在$|K|$的各点的充分小邻域



图 11-15

内与有限多面体具有相同的结构。例如从图 11-15 看到的 n 维欧氏空间是由无限复形所确定的多面体。它们构成局部紧致的可分度量空间。

设多面体 P 的两个三角剖分为 K，L。这时，所谓 L 为 K 的细分，和曲面的情形一样，K 的任意单形恰被 L 的若干个单形所三角剖分。如图 11-16，若利用重心相继地进行细分，则可得到任意精密的细分。

一般地，设有两个复形 K_1，K_2，在它们之间将 r-单形映为 r-单形的双射 $f: K_1 \to K_2$ 下，使 τ 为 σ 的边单形的充分必要条件是使 $f(\tau)$ 映为 $f(\sigma)$ 的边单形。当 f 满足上列条件时，则说 f 给出 K_1 与 K_2 的**同构**。即 K_1 与 K_2 同构是它们的构成元素以及它们的组合方法完全相同。因此，如果复形 K_1 与 K_2 同构，则它们的多面体 $|K_1|$ 与 $|K_2|$ 同胚。

n-流形是它的各点都具有与 n 维开球 OB^n 同胚邻域的可分度量空间。在第十章中，在 $n=2$ 的情形(紧致的)下已经做了三角剖分。它指出对于闭曲面 M^2 常存在 $|K|=M^2$ 的复形 K (曲面的三角剖分定理 I)，尤其是 (曲面的三角剖分定理 II) 对于 K 的任意不同的 2-单形 σ^2 与 τ^2，$\sigma^2=\sigma_0^2$, σ_1^2, $\cdots$,

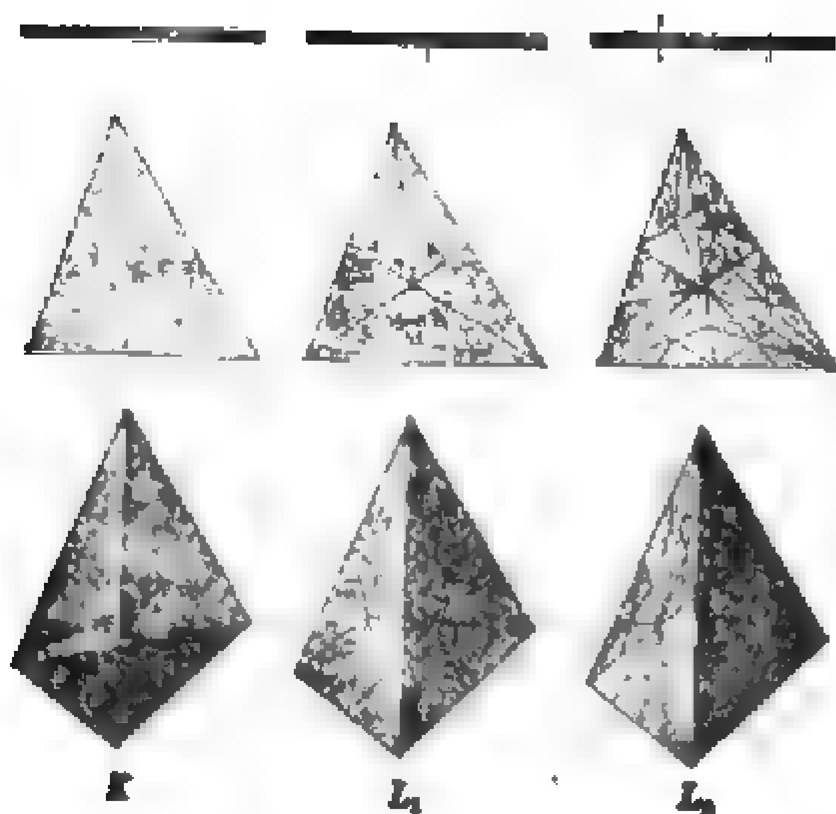


图 11-16

$\sigma_r^2=\tau^2$，构成以各个 $\sigma_i^2\cap\sigma_{i+1}^2$ 为共同边的 2-单形列。在这里提出，对于一般的 n-流形是否能象曲面那样进行三角剖分？

1956 年美国的谟依斯（Moise）证明了下列事实。

M^3 的三角剖分定理 I 3 维流形 M^3 可三角剖分。

M^3 的三角剖分定理 II 3 维流形 M^3 的三角剖分设为 K。

(1) 任何 3-单形的边至多是 K 的两个 3-单形的边单形。

(2) 对于任何两个不同的 3-单形 σ^3，τ^3，有 $\sigma^3=\sigma_0^3, \sigma_1^3, \cdots, \sigma_r^3=\tau^3$，而且可取得以 $\sigma_i^3\cap\sigma_{i+1}^3$ 为 σ_i^3，σ_{i+1}^3 的共同 2-单形的 3-单形列。

(3) 不论取 K 的任何顶点 v，都有过该点的 K 的所有 3-单形所确定的多面体与 3 维球 B^3 同胚。

M^3 的三角剖分定理 III（M^3 的基本猜想定理） 设 3 维流形 M^3 的任意两个三角剖分为 K_1，K_2，则存在同构的细分 L_1，L_2。

当 $n \geqslant 4$ 时该定理对 M^n 是否成立？这个问题到现在为止尚未解决。1969 年克尔贝 (Kirby) 与西本曼 (Siebenmann) 明确地指出，在一般情形下定理不成立以及在什么条件下成立。

如 M^3 的三角剖分定理 II，具有满足类似条件的三角剖分的 n-流形叫做 n-维**组合流形**或 n-**PL-流形**。这种 PL-流形在PL-拓扑学中起主要作用。

§3 微分流形

所谓 n 维流形，就是这样的拓扑空间，就其局部来说为 n 维欧氏空间，即对其任何一点都有一个与 n 维欧氏空间相仿的邻域。所谓 2 维流形，就是这样的拓扑空间，它的任何一点都有一个与以该点为中心的开圆盘相仿的邻域，例如普通的球面、椭圆面、射影平面、环面以及哑铃曲面（暂时不考虑流形的边界）。虽然说的是 2 维，但对于一般 n 维也同样成立。现在以 2 维曲面为例来叙述微分流形。

先对微分法稍做复习。

首先把函数 $y = f(x)$ 看做 $f: R \to R$、做数列

$$\{(f(x + h_n) - f(x))/h_n\}.$$

这里 $\{h_n\}$ 是收敛于 0 的任意数列。因此，当数列

$$\{(f(x + h_n) - f(x))/h_n\}$$

与 $\{h_n\}$ 的选取无关地常收敛于一个常数时，称函数 f 在 x 可微，这个常数叫做函数 f 在 x 的导数。用记号

$$\frac{dy}{dx},\ dy/dx,\ y',\ \dot{y},\ f'(x),\ Df(x)$$

来表示。如果 f 在 R 的子集 A 的各个点都可微，则称 f 在 A 上可微。这时，把在 A 的点 x 上 $f'(x)$ 所对应的函数 $f': A \to R$ 叫做函数 f 的**导函数**。因而从 $f(x)$ 求 $f'(x)$ 进行微分的算法

叫做微分法.

这就是对高等学校学过的微分的复习，大家经过艰苦的努力，才从数的世界超脱出来而进入了拓扑空间. 又因为数0的出现，我想不是很理想的，其原因可从式 $(f(x+h_n)-f(x))/h_n$ 看到，在这里用到了数的减法与除法. 拓扑空间是把数几何化，对于 $\{h_n\}\to h$ 给出巧妙的处理，因为把代数系的考察全都省略，所以在拓扑空间中没假定有加法和乘法. 因此，作为它们的逆运算的减法和除法也无法确定. 所以在拓扑空间上也无法定义微分法. 可是，如果拓扑空间是流形，则它的各个点的邻域是欧氏空间，也可以把它看做是向量空间，当然可以考虑微分法. 具有这种微分法的拓扑空间就是微分流形.

如果函数 $f:R\to R$ 在 A 上可微，则 f 是连续函数，但连续函数不一定可微.

如果 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 R 中可微，则 $(f'(x))'=f''(x)$ 是 x 的函数. 一般地，如果 $f^{(n-1)}(x)$ 在 R 中可微时，则

$$(f^{(n-1)}(x))'=f^{(n)}(x)$$

是 x 的函数，称之为 $f(x)$ 的**第 n 阶导函数**或叫做**第 n 次导函数**，用记号

$$\frac{d^n y}{dx^n},\ d^n y/dx^n,\ D^{(n)}y,\ f^{(n)}(x)$$

表示，当第 n 阶导函数被确定时，函数 f 叫做**可 n 次微分**. 尤其是 $f^{(n)}(x)$ 为连续函数时，称 f 为 **n 次连续可微**.

n 次导函数 $f^{(n)}(x)$，当 $n\geq 2$ 时，一般地叫做**高阶导函数**或**高次导函数**.

把这种微分的想法扩大为映射 $f:R^n\to R$. 映射 f 是以 R^n 的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为变量，如果仅 x_1 取 R 的任意值，而其它的 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 各为常数，这时映射 f 实际上成为 $R\to R$ 的函数. 在这里，象前面那样对 x_1 进行微分. 如果函数对

x_1 是可微的，则称 f 对 x_1 是**可偏微分的**. 它的导函数叫做**偏导数**.这种运算叫做**偏微分**. 这种想法不仅限于 x_1，对于 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的任何 x_i 都适用. 对于 x_i 的偏导数，用记号 $\partial f/\partial x_i$ 表示. 即

$$\{(f(x_1, x_2, \cdots, x_i + h_n, x_{i+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n))/h_n\} \to \partial f/\partial x_i.$$

$\partial f/\partial x_i$ 以 $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $f_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $D_{x_i}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 或 $D_i f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 等记号表示.

例如，若 $f: R^2 \to R$ 为

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2,$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$$

(当计算 $\partial f/\partial x_1$ 时，把 x_2 看做常数).

与前面情形一样，映射为 $f: R^n \to R$，在 R^n 的某邻域 U 的各点，若确定各偏导数为连续映射(称之为偏导函数)，则称 f 为 C^1-类的映射. 在这里值得注意的是，f 的各偏导数 $\partial f/\partial x_i$ 均为映射

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}: R^n \to R.$$

映射 $f: R^n \to R$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$，对于 x_j 可再偏微分，就得 2 阶偏导函数 $\partial(\partial f/\partial x_i)/\partial x_j$，把它记做 $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$. 同样地可以定义第 n 阶偏导函数

$$\partial^n f/\partial x_1, \cdots, \partial x_j \partial x_k = \partial(\partial^{n-1} f/\partial x_1, \cdots, \partial x_j)/\partial x_k.$$

一般地，如果各偏导函数连续时，则与偏微分的顺序无关. 例如，$\partial^3 f/\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 = \partial^3 f/\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1$. 一般地，映射 $f: R^n \to R$ 具有到第 n 阶偏导函数，当它们连续时，称 f 为 C^n **类函数**.

若对任意的 n 为 C^n-类，则称 f 为 C^∞ 类函数或叫无限次连续可微函数. 前面的例是C^∞类函数.

其次,考虑m个 C^r-类映射 $f_1, f_2, \cdots, f_m$. 因为各 f_i 为 $f_i: R^n \to R$，令

$$(f_1, f_2, \cdots, f_m)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n),$$
$$f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)),$$

这时,映射 $(f_1, \cdots, f_m)$ 成为映射

$$f = (f_1, \cdots, f_m): R^n \to R^m.$$

这样的映射 $f: R^n \to R^m$，叫做从 R^n 到 R^m 的 C^r 类映射.

现在，在曲面上引入微分法. 若曲面为平面，则用一组 (x, y) 轴表示所有点. 对于曲面就不这么简单,总之,因为流形上各点的邻域是开圆盘≅与平面相同. 设曲面M的各点 p 的邻域为 U_i,存在从 U_i 到平面的单位开圆盘 V_i 上的同胚映射

$$\varphi_i: U_i \to V_i.$$

因为 V_i 在平面上，利用 (x, y) 的坐标，可知点 p 的象 $\varphi_i(p)$ 的坐标为 (x_i, y_i),把它看做点 p 的坐标. 关于这个坐标系在 M 上所确定的映射,例如 $f: M \to R$ 可微.

话说到这里已经够了，但是点 p 一般地还包含于另一点的邻域 U_j 中. 对其它各点也与 p 一样,考虑同胚映射

$$\varphi_j: U_j \to V_j,$$

$\varphi_j(p)$由 V_j 的坐标系确定坐标为 (x_j, y_j)(图 11-17(i)). 这样,在流形上同一点 p,具有不同的坐标 (x_j, y_j)，为了使函数

$$f: M \to R$$

可微,不论取哪个坐标系都应该是可微的,若不可微不仅不方便而且无意义.

现在，设 $U_i \cap U_j$ 不空，因为 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 在 $U_i \in R^2$ 的区域,而 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 在 $U_j \subset R^2$ 的区域中,所以

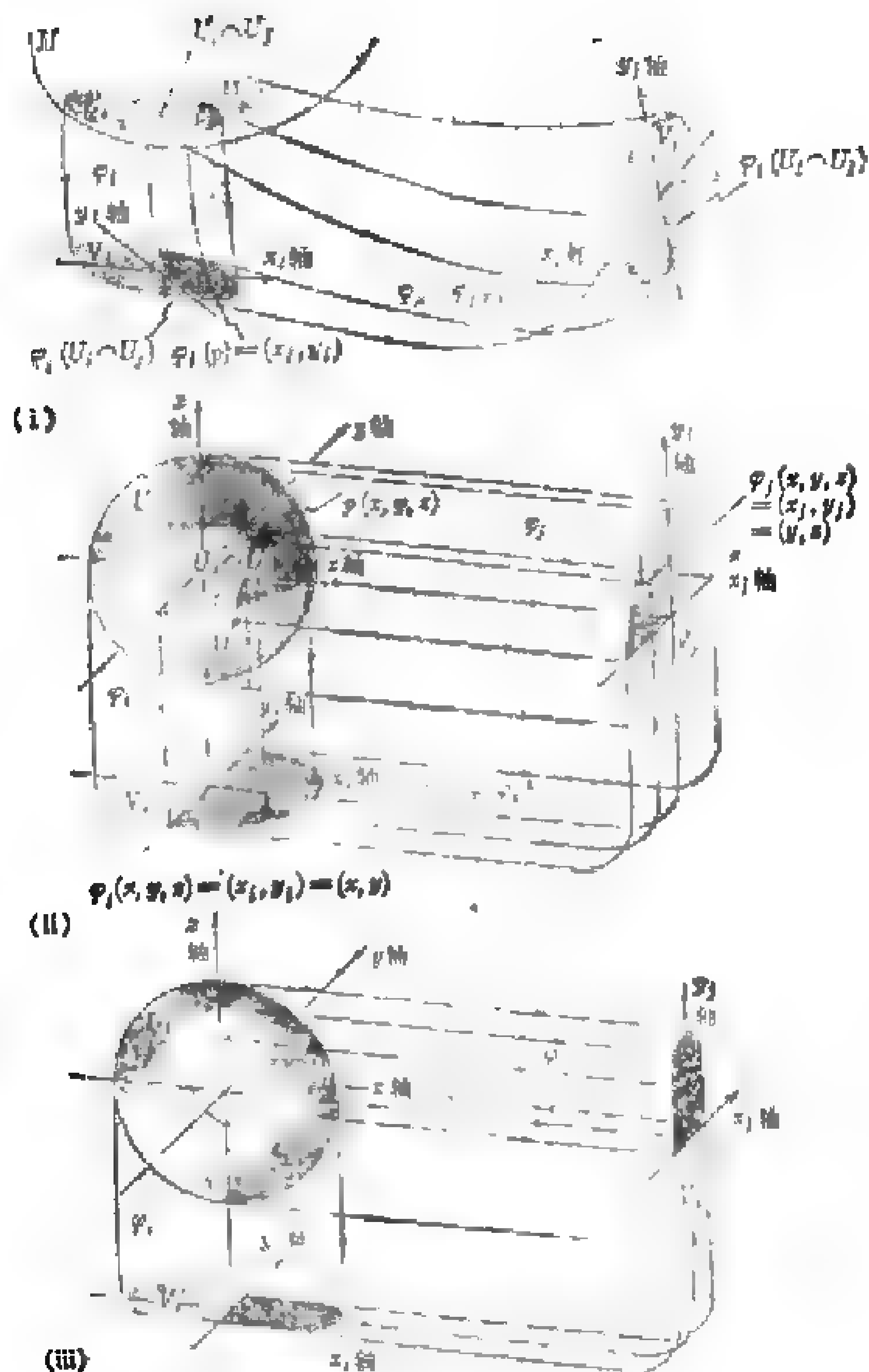


图 11-17

$$\varphi_{ji} = \varphi_j \cdot \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

是 R^2 的区域到另一个区域的映射. 在这里利用了微分的概念。因为在这里做了如下的可微假定

"从 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 到 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 上的同胚 $\varphi_{ji} = \varphi_j \cdot \varphi_i^{-1}$: $\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ 是 C^r-类映射 $r > 1$"。

假定这样可微成立的 n-流形 M^n 的邻域族 U_α 和同胚

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha$$

的对的族

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

叫做 M^n 的 **C^r-类的坐标邻域系**. 因此,把这样具有 C^r-类坐标邻域系的流形 M 叫做 **C^r-类微分流形**或简称 C^r-流形. 在这里,当 $r \geqslant 2$ 时,道理也是一样,在本书中,设 $n \geqslant 2$,对于 C^r-类微分流形简称为**微分流形**.

微分流形首先是普通的流形 M^n, 并且对 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是可微的. 最初的普通流形没有假定坐标系的可微性, 为了把它与微分流形区别开, 而把它叫做拓扑流形. 关于可微分坐标系,对于有边界的流形也可类似地来定义.

观察图 11-17(ii) 的球面,取 U_i 为 $z > 0$ 的北半球面,U_j 为 $x > 0$ 的半球面. 这时 $U_i \cap U_j$ 是涂色的 $\frac{1}{4}$ 半球面. φ_i 是球面到 (x, y) 面的正投影(平行 z 轴)即

$$\varphi_i(x, y, z) = (x, y) \text{ 即 } x_i = x, y_i = y.$$

又 $\varphi_j(x, y, z) = (y, z)$ 是到 $x = 0$ 平面的正射影,即

$$x_j = y, \quad y_j = z.$$

这时,因为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 且 $z^2 = (1 - x^2 - y^2)$, 所以

$$\varphi_{ji} \text{ 为 } x_j = y_i, \quad y_j = (1 - x_i^2 - y_i^2)^{1/2},$$

它们是 C^∞ 类映射 (φ_{ij} 也一样).

设上例中的球面 S^2 中的 $z > 0$, $z < 0$, $x > 0$, $x < 0$,

$y>0$, $y<0$ 的六个半球面为 $U_1, U_2, \cdots, U_6$. 从上面的计算可知 S^2 是微分流形. 在环面上，如图 11-17(iii) 取八个 U，构成微分流形 (φ 是平行于轴的正射影).

1940 年英国的怀特海德，美国的凯伦 (Cairns) 等，证明了微分流形是可三角剖分的组合流形 (PL-流形).

事实上，如在第十二章中，关于多面体的三角剖分定理 I，II 以及基本猜想定理的类似定理都成立.

微分流形的三角剖分定理 I 微分 n-流形可以三角剖分.

微分流形的三角剖分定理 II 设微分 n-流形的三角剖分为 K，则

(1) 任何 $(n-1)$ 单形的边至多是 K 的两个 n-单形的边单形；

(2) 对于任何两个不同的 n-单形 σ^n, τ^n, 可取 $\sigma^n=\sigma_0^n$, $\sigma_1^n, \cdots, \sigma_p^n=\tau^n$ 且 $\sigma_i^n \cap \sigma_{i+1}^n$ 是 $\sigma_i^n, \sigma_{i+1}^n$ 的共同 $(n-1)$ 单形的 n 单形列；

(3) 对于 K 的任意顶点 v，在该点相交的 K 的所有 n-单形所确定的多面体与 n-维球 B^n 同胚.

微分流形的三角剖分定理 III (微分流形的基本猜想定理) 设微分 n-流形的任意两个三角剖分为 K_1, K_2，则存在同构的细分 L_1, L_2.

在这里产生这样的问题，即，反之组合流形 (PL-流形) 是不是微分流形？这正是在组合流形 M^n 中，是否存在覆盖 M^n 的开集 V_i^n 和把 V_i^n 映为 R^n 的 n-维球 OB_i^n 的 PL-同胚 φ_i 的族，亦即使覆盖 M^n 开集 U_i^n 和映 U_i^n 为 R^n 的 n-维球 OB_i^n 的映射是否构成微分坐标系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 的问题. 这个答案是一般不成立，当 $n \leqslant 7$ 时，组合流形 M^n 是微分流形. 当 $n>7$ 时，在什么条件下成为微分流形的问题已经解决.

第十二章 向 量 场

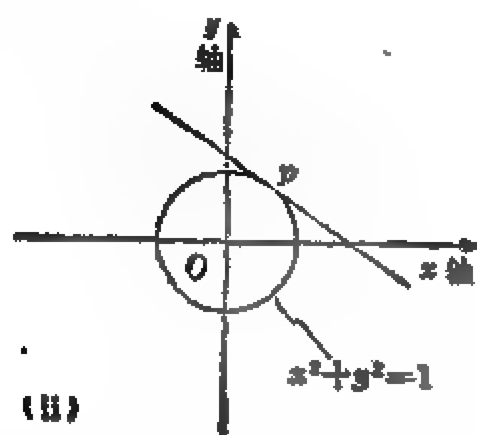
§1 切向量 · 丛

因为把 n 维微分流形 M^n 看做是覆盖它的开集 U_1, U_2, $\cdots$, U_m 的各重合部分都给出由微分同胚相连系的坐标，从而与 M^n 本身嵌入任何空间无关. 当把 M^n 嵌入于充分高维的欧氏空间 R^N 时，若取适当的 R^N 的坐标 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$，则各个 U_i 可由 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为变数的 $N-n$ 个可微函数 $x_{n+1}, \cdots, x_N$ 来表示. 例如在图 11-17(ii) 的球面 S^2 中，取 U 令 $z>0$，将 S^2 嵌入于 R^3, U 的任意点 (x, y, z)，由于 $N=3$, $n=2$，所以 $z=(1-x^2-y^2)^{1/2}$. 于是，在 M^n 上各点 p，考虑过 p 的曲线，确定在 p 点的切线. 若对连续变动的各曲线都有它的对应切线，则切线的集合构成点 p 处 M^n 的切平面(一般叫切面)(图 12-1). 例如在平面上的单位圆周 $x^2+y^2=1$，空间中环面 $(x^2+y^2+z^2+3)^2=16(x^2+y^2)$ 上各个点的切线以及切平面，可如图 12-1(ii), (iii) 那样做出. 这样的切面随 M^n 上点的运动而改变. 它的改变很自然地给人们以 M^n 是光滑的感觉. 当把这一事实与带棱的多面体的表面比较就可以知道了. 因为微分流形 M，总是可以实现于适当高维的欧氏空间，所以也叫**光滑流形**.

如果把可微分曲面上各个点的切平面看做上面谈过的 2 维向量空间，则在曲面各点都有相切的 2 维向量空间. 我们把切平面全体叫做曲面 M 的切向量**丛**.

这个切向量丛是把流形 M^n 光滑地嵌入于适当高维欧氏空间 R^N 而确定的，这是为了便于直观地画出切线. 但是这个





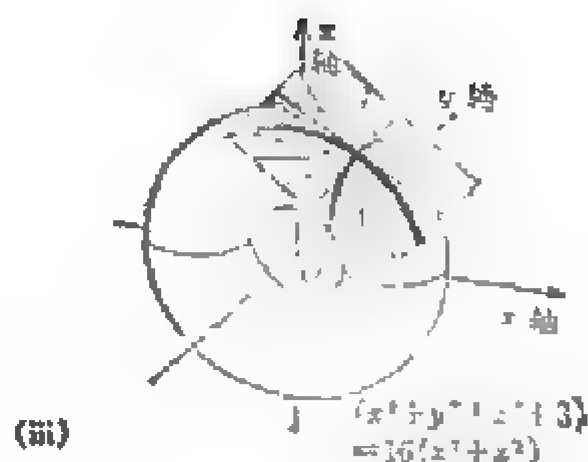


图 12-1

事实，仅由 M^n 而不必嵌入于 R^N 也同样成立。因为在 M^n 的各点有对应的 n 维向量空间，它确定**切向量丛**。

在下图中，如果取与切平面垂直的直线叫法线，或者说在各点都对应地有叫做法平面的向量空间，则称之为**法向量丛**。如果 M^n 所嵌入的欧氏空间为 R^N，则各点所对应的向量空间的维数为 $N-n$。

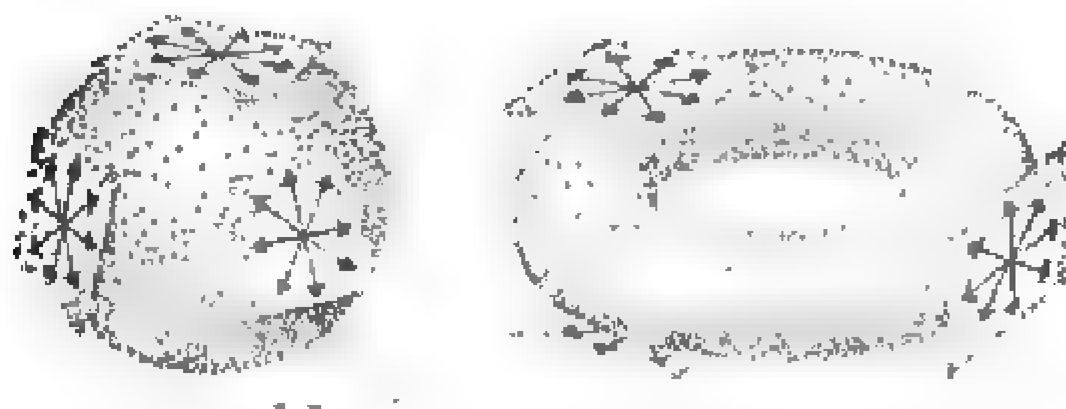
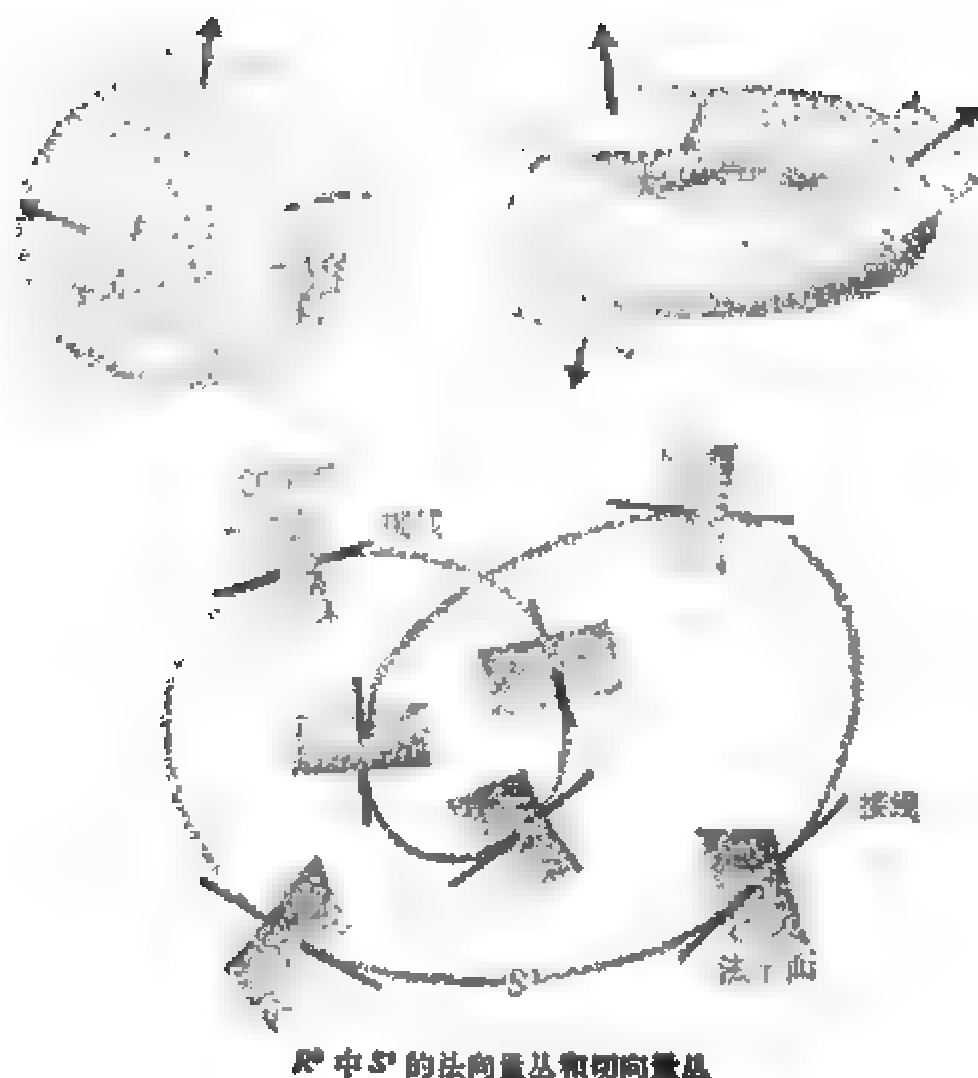


图 12-2



R^3 中 S^1 的法向量丛和切向量丛

图 12-3

§2 向量场

首先考虑圆盘或球面，试在它们各点的切平面上做一个向量，如图 12-4(ii)，(iii)(各点的切平面就是所做切向量的平面)．在圆盘的各点只做一个切向量，称它为在圆盘上的**向量场**．因为要考虑它的拓扑，如图 12-4(i)，以某直径为界，若向量突然改变方向这就产生了困难． 又如图 12-4(ii)，随着点的移动而向量连续变化．下面我们观察这个连续的向量场的拓扑(如所知，在这里不给连续向量场以严密的定义)．

从图 12 4(ii) 和 (iii) 立刻可以知道，对圆盘与球面上的

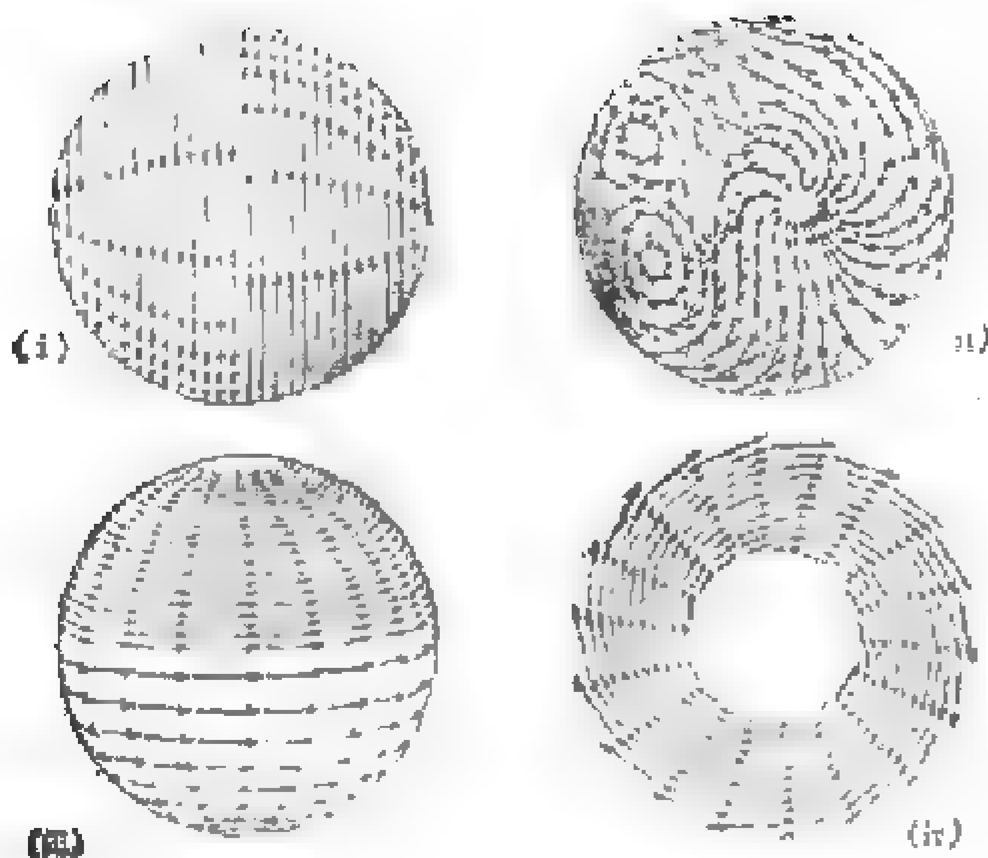


图 12-4

向量场，不论你怎样动脑去做都出现奇异点。(所谓奇异点就是在该点向量为零向量，即有向线段逐渐缩小，在该点有向线段缩为一点。)从各种实验来看，圆盘和球面都要出现几个奇异点。与此相反，当把图 12-4(iii) 的赤道看做圆周，以及(iv)的圆环，如图那样存在着完美的无奇异点的向量场。象图那样的向量场，圆环实际上是表示流体，向量场可以看做是表示流体的速度向量，使人们易于理解它的状态。在这里所谓的向量场，它的向量是这个空间的切向量(即，把它看做某点和它邻近点连结的有向线段的极限)。

这样的(切)向量场的奇异点，看起来似乎是多种多样的，实际上，仔细地进行研究，从拓扑学的观点来看，仅有以下几种。

关于圆环的情形，可以把向量场看做某流体沿着向量那

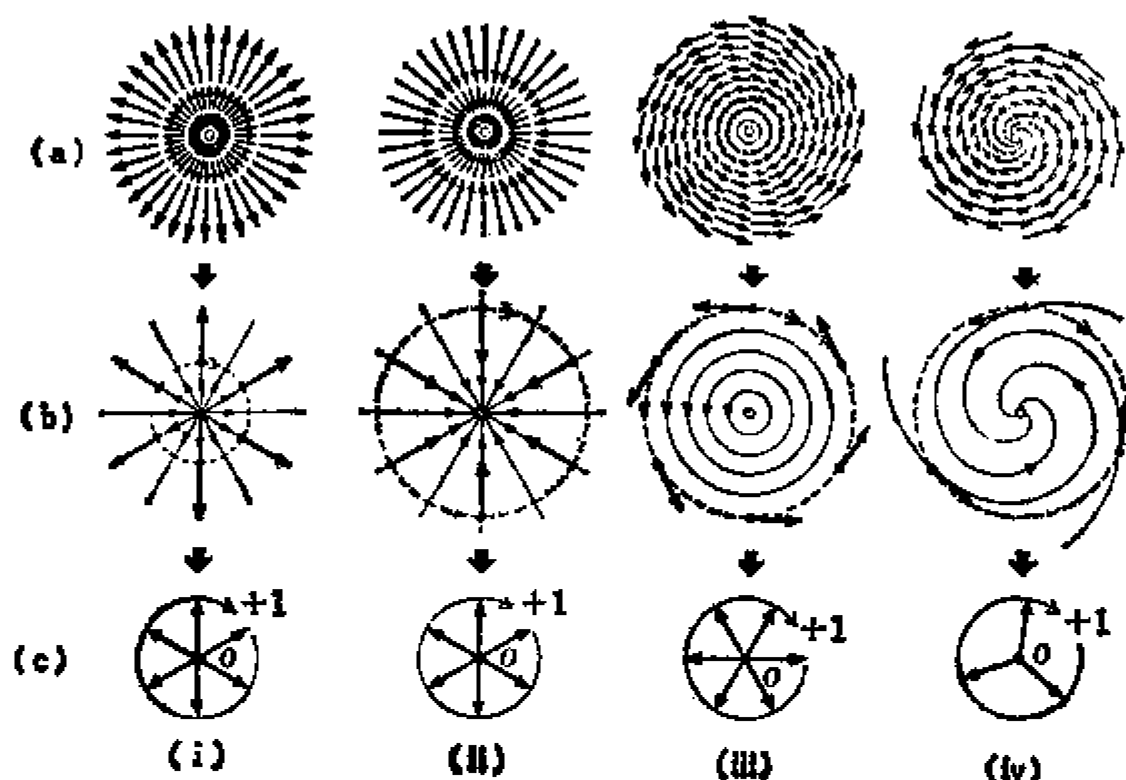


图 12-5

样流动. 向量场可以看做表示流体运动的速度向量. 如果这么看，则图 12-5(i)(a)的奇异点是流体从该点徐徐流出的点，把这个点叫做**源点**. (ii)(a) 是流体徐徐向该点汇集，恰与源相反，把这个点叫做**汇点**(或叫眼). (iii)(a) 是流体绕该点旋转，把它叫做**旋涡**. (iv)(a) 是旋涡，但流体从外部逐渐向该点靠近，把这个点叫做**焦点**.

这些奇异点都具有共同性质. 如图 12-5(b)，以奇异点为中心画小圆(虚线)，在这个圆周上各点画出对应向量，把这些向量的始点平移到定点 o，如图 12-5(c)，以 o 为中心按矢的方向旋转，即按时针的方向旋转，旋转数均为一周. 所谓旋转一周，是指在奇异点的小圆周上任意附以矢的方向，在以 o 为中心的圆周上取同样的方向，当在方向一致的情形下旋转一周时，这样的奇异点叫做指数是 1 的奇异点. 此外具代表性的奇异点，如图 12-6(i) 的**交差点**，它的指数为 -1. 又奇异

点如(ii)那样由两个奇异点合成的复杂的奇异点，它是指数为－2 的交差点. 同样地，当m为整数时.也可以考虑$-m$ 为指数的交差点. 同样也可以考虑指数为+的情形. 如图 12-7，首先考虑(i)中源与汇点为不同奇异点的向量场，当把这两个奇异点曳引使之重合时，如(ii)所表示的，可以构成指数为2的奇异点.

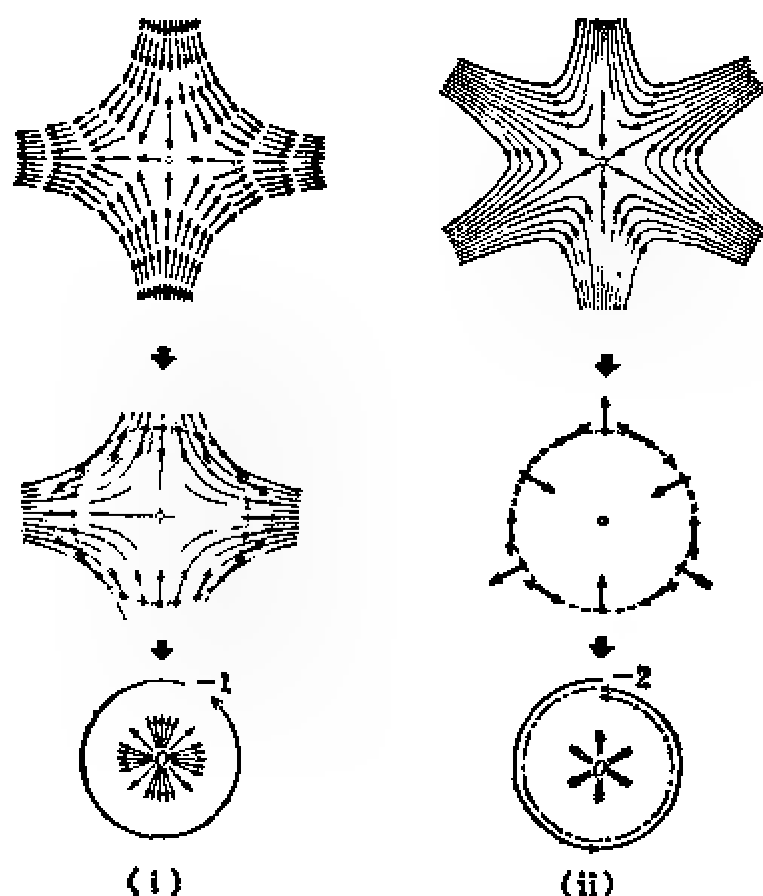


图 12-6

可以举出各种奇异点和它的指数的例子，但庞加莱证明了下面的定理.

曲面M上切向量场的奇异点指数的总和等于该曲面的欧拉示性数$\chi(M)$.

作为曲面，特别是圆盘D，因$\chi(D)=1$，至少具有一个奇异点. 因此，把头上的头发使之处于自然状态，把头发可以

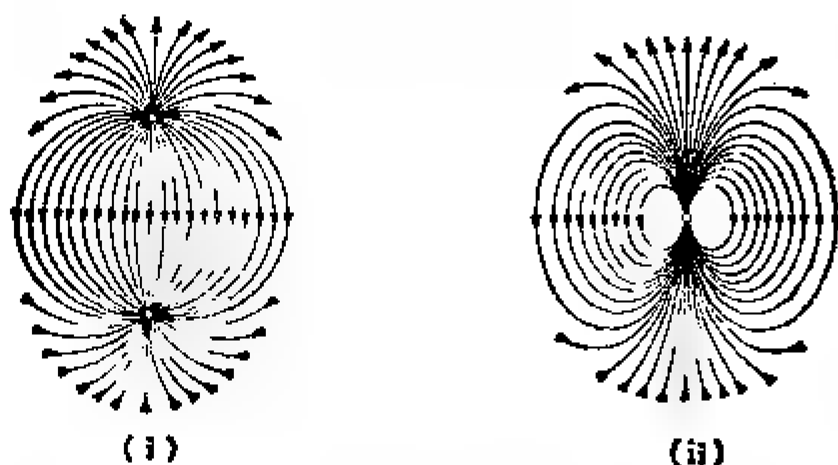

(i) (ii)

图 12-7

看做切向量，这时根据这个定理的结论，至少有一个奇异点，那就是头上的漩. 从而得到人类至少有一个发漩的生物学的结论.

§3 可微函数

设已给从微分流形 M 到 R 的映射 $f:M\to R$. 取 M 的一个点 p. 设 (U_i, φ_i) 是含 p 的可微坐标. 这时

$$f\varphi_i^{-1}:V_i\to R$$

是函数. 因为 $V_i\subset R^n$，所以对于 $f\varphi_i^{-1}$ 可以考虑可微性. 在这里设 $f\varphi_i^{-1}:V_i\to R$ 在 $\varphi_i(p)$ 是可微的. 取含 p 的另一个可微坐标 (U_j, φ_j). 这时

$$f\varphi_j^{-1}:V_j\to R,$$

在 $\varphi_j(U_i\cap U_j)$ 中考虑 $f\varphi_j^{-1}$，从图 12-8 可知

$$f\varphi_j^{-1}=f\varphi_i^{-1}(\varphi_{ji})^{-1}.$$

由于 (U_i, φ_i) 与 (U_j, φ_j) 是可微坐标，所以 $(\varphi_{ji})^{-1}=\varphi_i\varphi_j^{-1}$ 是可微的，原来已假定 $f\varphi_i^{-1}$ 可微，所以 $f\varphi_i^{-1}$ 与 $(\varphi_{ji})^{-1}$ 可微，从而 $f\varphi_j^{-1}$ 在 $\varphi_j(p)$ 是可微的. 即映射 f 是在某点 p 定义的，它在含 p 的任一个坐标系中可微，则在含 p 的所有坐标系中都是可微的. 满足这一假定的映射 $f:M\to R$ 叫做**可微函数**或

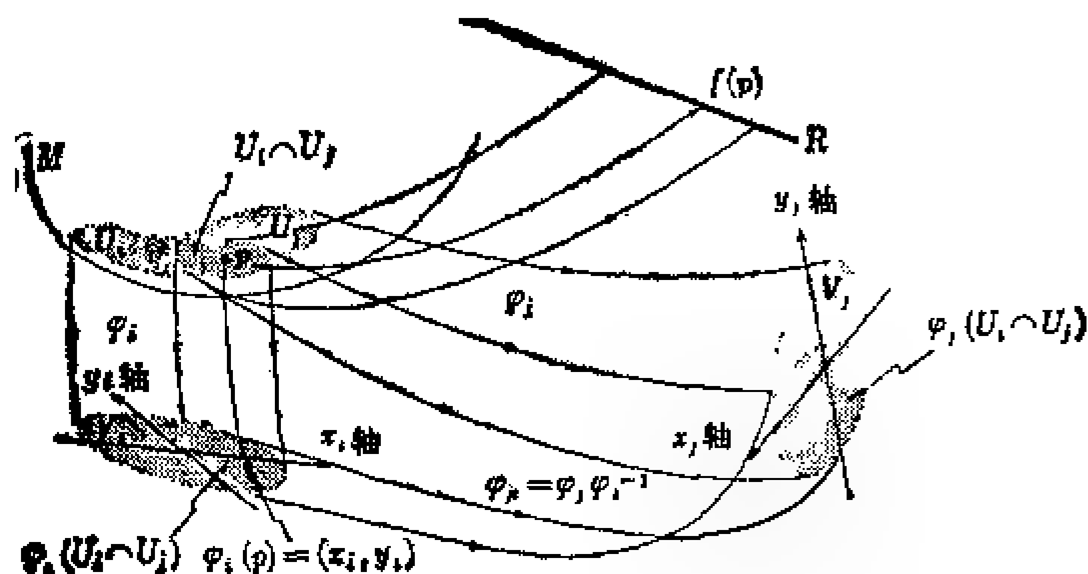


图 12-8

叫光滑函数.

以前所述，我想问题已经明确，为了能够更直观一些，把微分流形光滑地实现到高维欧氏空间中，以便更确切地理解已谈过的事实.

如前所述，已把M光滑地嵌入于适当的 R^N. 在 R^N 上增加一个坐标轴，把它看做 R^{N+1}，这时M可以看做嵌入于 R^{N+1} 的超平面 R^N中. 图 12-9 表示在 $R^N = R^2$ 中，M 是圆周. 当 $f: M \to R$ 是光滑函数时，如在图 12-9 中，当M的点 p 在 f 下所映得的数为 $f(p)$时，这个点 p 的坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 不动，而 x_{N+1} 坐标值取 $f(p)$，即

$$p' = (x_1, x_2, \cdots, x_N, f(p)).$$

即把M的点 p 在 f 的映射下所映得的数 $f(p)$，仅使 p 上下移动为 p'. 这时，M 上升到 R^{N+1} 中，嵌入为 M'. 显然这样得到的 M' 与 M 同胚. 而且，这个 M' 也是 R^{N+1} 中的光滑流形.

以这种看法为依据，光滑函数 $f: M \to R$ 实际上是 R^{N+1} 中的 M'（它与M相同）沿 x_{N+1} 坐标轴方向的正射影. 因此，前面提及的在 R^N中光滑的嵌入是M沿第 x_N 坐标轴方向的正射



图 12-9

影，这就是对光滑函数 $f: M \to R$ 的理解。

例如图 11-17(iii)，R^3 中的环面 M 沿 x 轴方向正射影是某光滑函数。

如果把流形看做地形的山和谷，则沿 x 轴方向的正射影就是**标高函数**，因此，任意的光滑函数 $M \to R$，可以断言它是 M 的标高函数。

§4 微分同胚

设 M，N 是微分流形，$h: M \to N$ 是连续映射．对于任意的可微函数 $f: N \to R$，当它的复合函数 $fh: M \to R$ 是可微函数时，则连续映射 h 是从 M 到 N 的可微映射．

特别是，$h: M \to N$ 是同胚，如果 h 与 h^{-1} 可微，则 h 叫做**可微分同胚映射**或**微分同胚**．因此，与同胚一样，对于微分流形 M 与 N 之间如果存在微分同胚，则称它们**微分同胚**．

显然，微分同胚是微分流形之间的等价关系，可利用它对微分流形进行分类．这样，在微分同胚下所保留的性质是微分拓扑的性质．研究这方面的数学分科叫做**微分拓扑**，因为

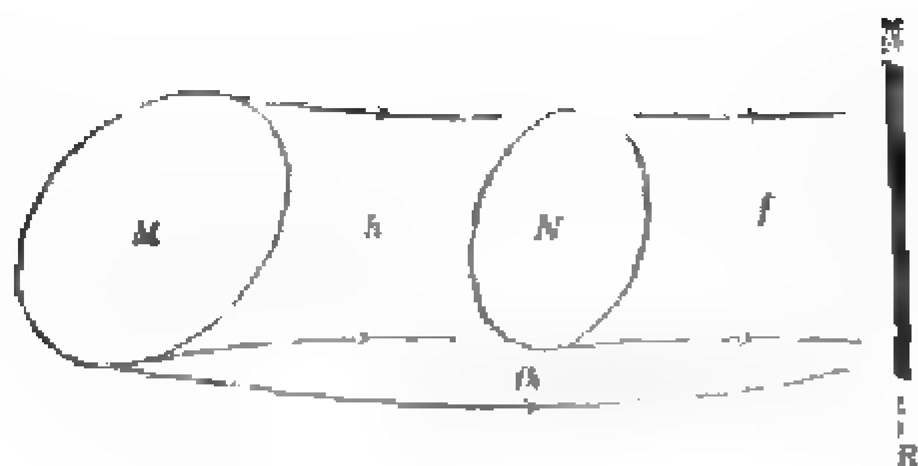
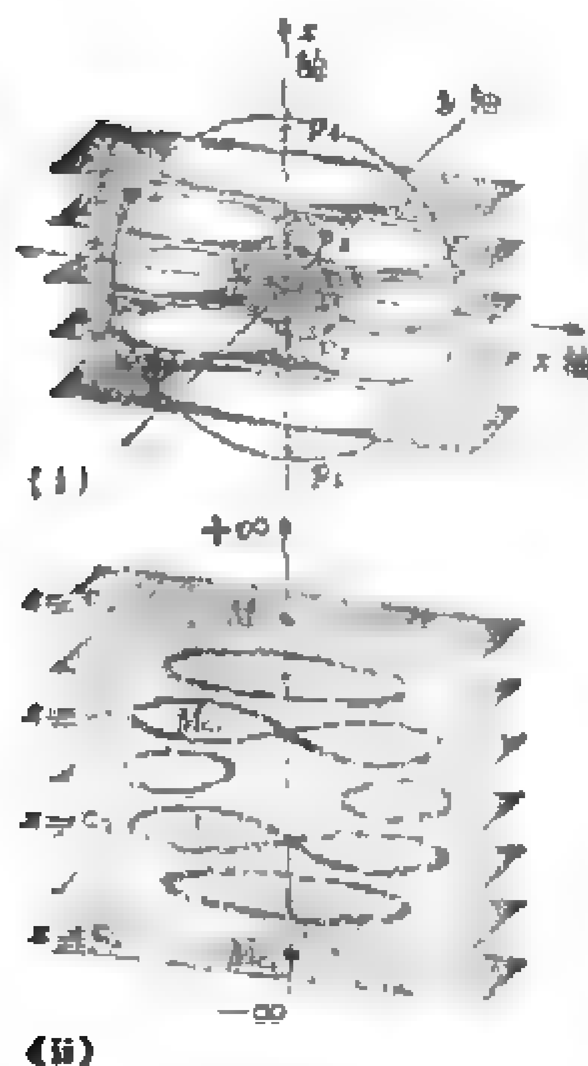


图 12-10



(ii)

图 12-11

微分拓扑在一般拓扑基础上还考虑微分性质，所以是比一般拓扑更精细的拓扑。

因为以后与向量场有关，故在这里对于作为微分拓扑典型的"挖补术"(也叫换球术)给以介绍. 如前所述，我们考虑微分流形M的可微函数 $f: M \to R$，函数 $f: M \to R$ 是沿 z 轴方向的正射影，又 M 是如图 12-11 那样的环面，图上点 p_1, p_2, p_3, p_4 与其它点显著不同，在该点处的切平面与 z 轴正交，且具有显著的特征. 由于在这四个点的切平面与 z 轴正交，若用函数 $f: M \to R$ 来表示，则得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

象这种各导数均为 0 的M的点叫做 f 的**临界点**，即，用上述正射影表示环面M的函数 f 具有 p_1, p_2, p_3, p_4 四个临界点.

一般地，$z = c$(常数)表示垂直于 z 轴，交 z 轴于点 c 的平面. 把 c 的值从$-\infty$逐渐增大，平面随之上升，观察该平面与流形 M的交 M_c，如图 12-11(ii)，以环面为例，当 c 取绝对值较大的负值时，$M_c = \varnothing$. 当 c 比 c_1 大时，首先 M_{c_1} 是圆周，当 c 取值 c_2 时，M_{c_2} 通过临界点 p_2，这时 M_{c_2} 是圆周上两点挨到一起，即两圆交于一点的情形，当 c 取比 c_2 大的值时，M_c是两个分离的圆周. 当取值 c_3 时，M_{c_3} 通过临界点 p_3，M_{c_3} 又成为两圆周交于一点的形状. 当 c 大于 c_3 时，M_c 是一个圆周，当 c 取值 c_4 时，临界点含于 M_{c_4}，实际上，这时

$$M_{c_4} = \{p_4\}.$$

当 c 再增大时，M_c 是空集$\varnothing$.

通过观察看到，当 c 从$-\infty$到$+\infty$连续变化时，$z = c$ 平面与 M 的交 M_c 为：

"如果 $z = c$ 不含临界点，取与 c 充分近的 c'，则 M_c 与 $M_{c'}$ 微分同胚。"

"如果 $z = c$ 含有临界点，ε 为充分小的正数，则 $M_{c-\varepsilon}$ 与 $M_{c+\varepsilon}$ 不同胚".

因此，要在临界点处研究 $M_{c-\varepsilon}$ 与 $M_{c+\varepsilon}$ 有什么不同。设 M 为微分流形，对于临界点 p_i 在 M 上的邻域的状态用可微函数来表示是非常重要的。例如，上例的环面，p_2 邻域用

$$z = -1 - \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$$

表示(图 12-12)。一般地，若把原点进行变换，且当 M 为 n 维

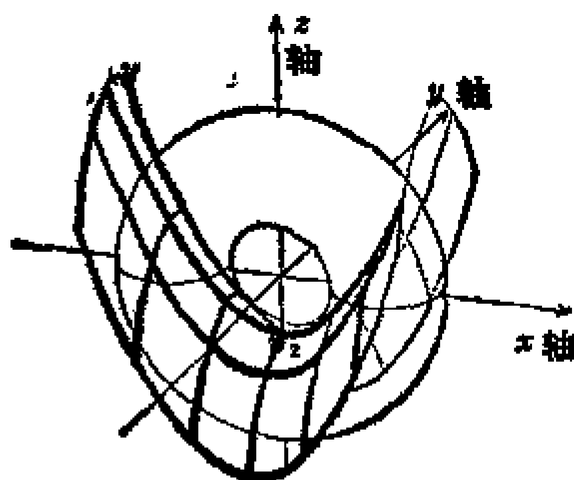


图 12-12

流形时，临界点 p 的邻域可以写做

$$\sum c_i x_i^2,\ c_i = \pm 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(上例的环面变为 $x_1^2 - x_2^2$。) $\sum c_i x_i^2 = 0$ 是 n 维空间的二次超曲面，它的几何形象是大家熟悉的。它的形象由 c_i 为 -1 的项的个数，即由**临界点的型数**完全确定。现在不说一般的，仅对环面临界点 p_2，p_3 来说，给出它的结论。在 p_3 处与前面所说过的 p_2 的情形一样，该邻域的形象为

$$z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

如果形 $\sum c_i x_i^2$ 是 $x_1^2 - x_2^2$，则型数 $r = 1$。在 p_3 前后的 M_c 的情况，如图 12-13 的左上部分。在 $M_{c_3-\varepsilon}$ 处取 $r-1$ 维球 $S^{r-1} = S^0$(即图上的两点 a，b)。做 S^{r-1} 与 $n-r$ 维球

$$B^{n-r} = B^{2-1} = B^1$$

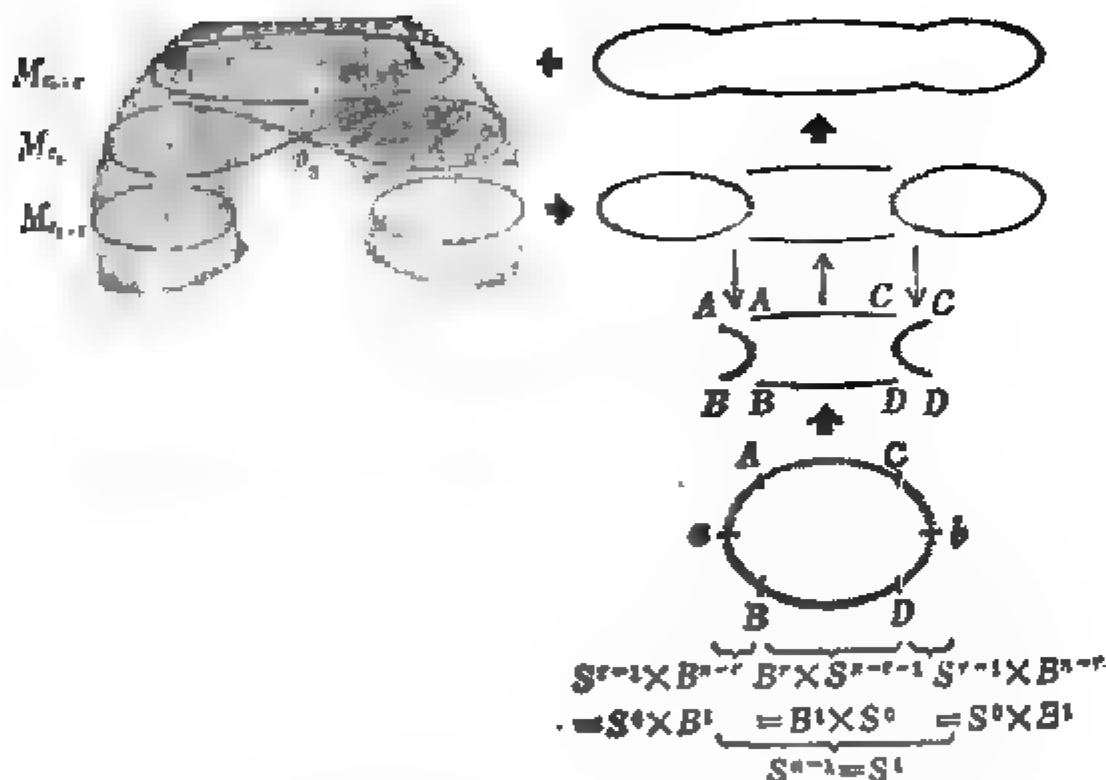


图 12-13

当 $n=2, r=1$ (型数) 时，$r-1=1-1=0$ 型的换球术，这时，$S^{n-1}=S^{1-1}=S^1$ (圆周：$AaBDbC$)，

$S^{r-1}=S^{n-r-1}=S^0$ (两点：a, b)，

$B^r=B^{n-r}=B^1$ (线段)，

则有

$S^{r-1}\times B^{n-r}=S^0\times B^1$ (二线段：AB, CD)，

$B^r\times S^{n-r-1}=B^1\times S^0$ (二线段：AC, BD)。

(线段) 的积 $S^{r-1}\times B^{n-r}$ (图 12-13 右边线段 AB 与 CD)，这样把 $S^{r-1}\times B^{n-r}$从 $M_{c_3-\varepsilon}$ 中除掉，而用另外的

$$B^r\times S^{n-r-1}=B^1\times S^0$$

代换，得到 $M_{c_3+\varepsilon}$。取切除的 $S^{r-1}\times B^{n-r}$ 与另外附加的 $B^r\times S^{n-r-1}$，象图 12-13 右下方那样合并起来成为一个球面 S^{n-1}(这种情形是圆周 S^1)，因此，从 $M_{c_3-\varepsilon}$ 到 $M_{c_3+\varepsilon}$ 的变化是从 $M_{c_3-\varepsilon}$ 中除去所考虑的球面 S^{n-1} 的一部分 $S^{r-1}\times B^{n-r}$，而加上球面的剩余部分 $B^r\times S^{n-r-1}$ 而得到的。因为 $M_{c_3-\varepsilon}$ 利

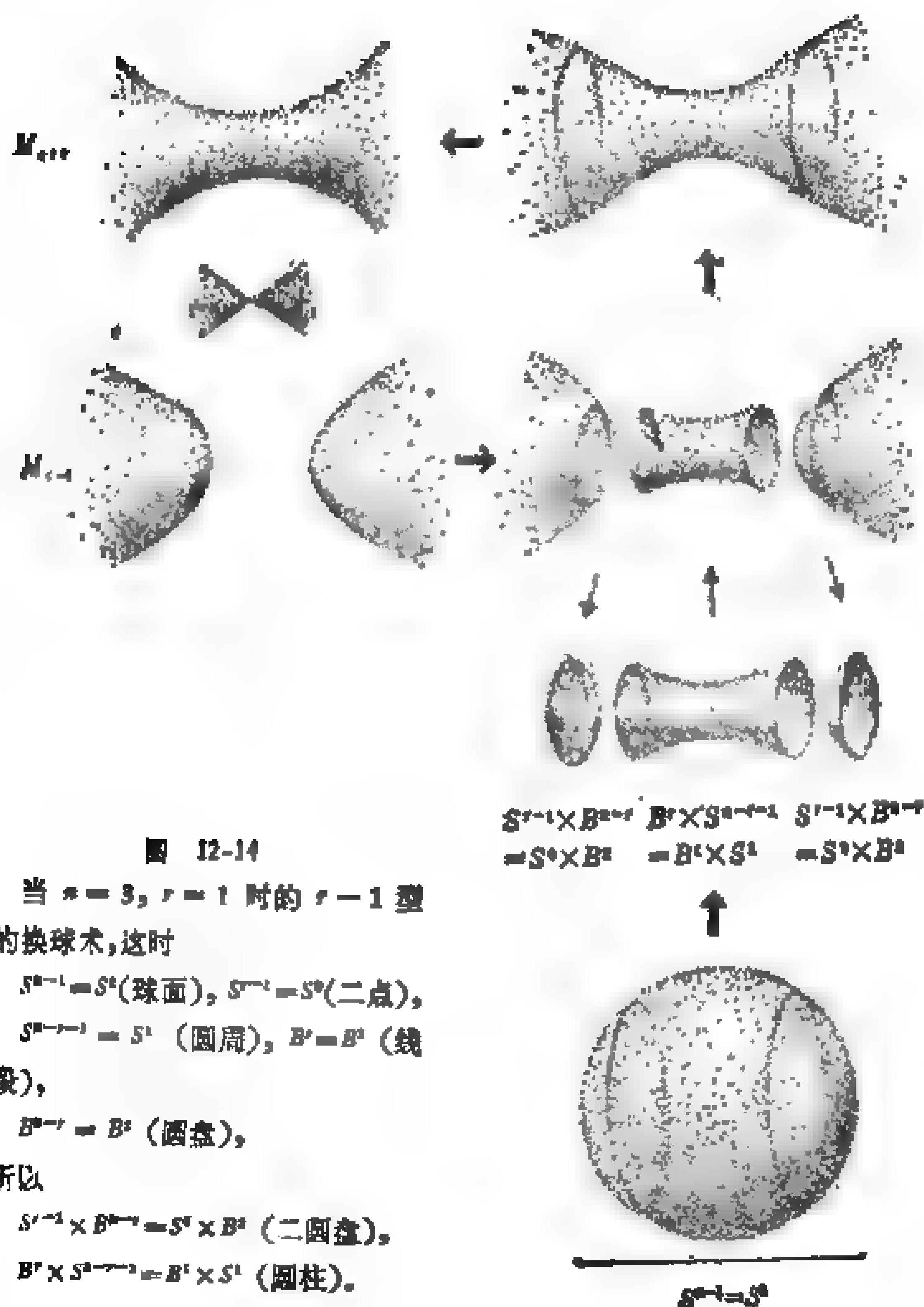


图 12-14

当 $n=3$, $r=1$ 时的 $r-1$ 型的换球术，这时

$S^{n-1}=S^2$（球面），$S^{r-1}=S^0$（二点），

$S^{n-r-1}=S^1$（圆周），$B^r=B^1$（线段），

$B^{n-r}=B^2$（圆盘），

所以

$S^{r-1}\times B^{n-r}=S^0\times B^2$（二圆盘），

$B^r\times S^{n-r-1}=B^1\times S^1$（圆柱）。

用球面变为 $M_{c_3+\varepsilon}$，所以说对于 $M_{c_3-\varepsilon}$ 进行了 $r-1$ 型换球术。关于在 p_2 临界点处，从 $M_{c_2-\varepsilon}$ 到 $M_{c_2+\varepsilon}$ 的变化，如果把图形上下倒过来，则操做过程应当是一样的，总之，它是 0 型换球术。图 12-14 是 $n=3$ 的 0 型换球术。

这种换球术或叫环柄理论，用微分拓扑学的方法可以相继地导出高维流形的一些性质。

第十三章 动力系统与结构稳定性

§1 形态形成论与拓扑学

到现在，如大家所知拓扑学的几何内容是很有趣的，正如第一章，在拓扑学的进展中已经说过的，拓扑学不仅对数学的各个分支，就是对于其他科学的应用以及开辟新学科也是有力的方法. 在这里只简单地介绍托姆于 1969 年发表的论文“生物学中的拓扑模型”.

形态形成的问题阐述了生物的起源与进化，它在现代生物学中是一个不可缺少的重要课题. 因此，对于发生学中的发生、繁殖等方面的形态形成过程的原因，需要进行很多实验. 例如植物的趋光性、光照及光阻止植物生长的 δ-羟基喹啉 (Oxine) 的化学物质等都是实验中要考虑的因素.

可是，万事不能都立刻就抓住其直接原因.而较多的是当考察一些深刻的原因时，不考虑更多的重要因素是不行的，而且它们是非常复杂地综合在一起，是遗传因子的分化呢？还是遗传 DNA 的指令 (decode) 呢？除笼统的解释之外几乎尚处于无法着手的状态.

其次，形态形成问题，就问题本身在理论上、概念上在现代科学中确切可取的究竟有多少，也不能说一点疑问都没有. 作为理论，这个问题必须做如下的解释：

“假定生物学中的所有局部形态以及物理现象由局部的生物化学的决定论所确定，在此基础上，利用它的组织结构对生物的整体的时间、空间的结构稳定性与繁殖给以说明.”

把问题这样确定下来，可以看到这种理论生物学的基本

问题与拓扑学处理的主要问题之间存在着非常密切的关系。拓扑学如同在第六章中叙述过的，是在假定了局部性质的基础上来研究拓扑空间的整体性质的数学，对于局部与平面具有相同结构的拓扑空间的曲面的整体的研究，已在第十章中讲过了，那是拓扑学的一种典型的方法。又如在第十一章中所叙述过的，拓扑学把流形(空间)的分类作为当前的主要目标。现在，由庞加莱首先提出的定性动力系统在微分拓扑成果的基础上已得到发展，同时作为拓扑新理论的结构稳定性理论，也在发展，这种理论在处理生物体自身繁殖结构的稳定性理论问题上是非常有力的工具。而且这种定性的动力系统的理论，不仅对于生物学，也包括生物、无生物在内，就是对于含有不连续概念的所有形态过程的研究都可广为利用。

这里值得注意的是，对任何形态过程作为研究对象的各物体，必然要附带着不连续的概念。到目前为止，由于古典数学都是建立在假定连续的基础之上的，不连续终究很难表达成解析式。由于这种理由，对于生物的分化，结晶的成长等等的形态形成，用解析式或函数量的模型来研究是不可能的。在这样的一些分支中，上述拓扑的定性新理论比古典分析进行的定量的计算具有有利的立足点。

§2 动力系统

关于形态形成问题的假定：

“局部现象由局部的决定论来确定……。”

把这种想法用数学精密地表示出来的最好形式是微分方程。由微分方程来表达局部的决定论在物理学，特别是在力学中有典型的例子。

例如在真空中，质量为m的物体在力 $F=(F_1, F_2, F_3)$ 的作用下，在空间$R^3(x_1, x_2, x_3)$中的运动状态，利用牛顿第二

定律:

$$力 = 质量 \times 加速度,$$

可写做

$$F_1 = m\frac{d^2x_1}{dt^2}, \qquad F_2 = m\frac{d^2x_2}{dt^2}, \qquad F_3 = m\frac{d^2x_3}{dt^2},$$

即首先给出微分方程

$$F_i = m\frac{d^2x_i}{dt^2} \qquad i = 1, 2, 3.$$

求解(积分)速度 $v(v_1, v_2, v_3)$ 以及物体的位置 $x(x_1, x_2, x_3)$,由初始条件完全确定(力 $F(F_1, F_2, F_3)$ 为方便计可以取常值). 这时,因为 $\frac{dx_i}{dt} = v_i$, 上面的微分方程可以写做

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= v_i \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{F_i}{m} \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3$$

的 6 个方程的微分方程组. 在这里把(x_1, x_2, x_3),(v_1, v_2, v_3)以及时间 t 的组叫做点 $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t)$,可以把它看做 7 维欧氏空间 R^7 中的一点. 如果把 R^7 的点的分量用同一文字 $(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ 表示,则上面的微分方程组还可写做

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{i+3}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{F_i}{m}, \quad i = 4, 5, 6, \\ \frac{dx_7}{dt} &= 1 \qquad \left(\frac{dt}{dt} = 1\right). \end{aligned}\right\}$$

上式的右边是 $x_1, x_2, \cdots, x_7$ 的函数,一般地用记号 $X_i(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ 来表示. 这一力学的问题在 R^7 中就转化成考虑微分方程组

$$(1)\quad \frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, x_2, \cdots, x_7),\ i=1,2,\cdots,7$$

的问题。当然右边的函数 $X_i(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ 无必要遍取 R^7 的所有点，只考虑它的一部分就已够充分，在很多情形下，只考虑 R^7 的某一个流形 M，仅在 M 的点上来考虑上面的微分方程组。

因此，这个微分方程组在适当的条件下对初始值 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_7^0)$，至少在局部的积分下得到解

$$(2)\qquad x_i=h_i(x_1^0, \cdots, x_7^0, x_1, \cdots, x_7).$$

这组解是，当给定初始条件 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_7^0)$ 后，它是从该点发出的一条曲线(积分曲线)。当在某时刻 t 时，该质点的位置与速度由在时刻 $t=x_7$ 所对应曲线上的其它的坐标所决定。这样质点运动的整体也由决定论所确定。从而何日何时在哪个方向上能看见水星，以及发生日蚀等等能够做出预报。伴随由这个时代的牛顿在力学上的成就而推动了物理学的大发展，产生了所谓拉普拉斯的恶魔的说法。由于这个恶魔知道支配宇宙所有物体的微分方程组，从而对明天的世界，来年的世界怎样变化，恶魔通过积分如上例中的方程，加进初始条件进行计算，对什么都可以预报出来。甚至可以说，明天我怎么样，我什么时候死，恶魔都能知道，这完全是令人不快的决定论的恶魔，但在恶魔的思想方法中有下面两个重要的缺点：

1° 恶魔虽然知道支配世界的微分方程组，但象想象的那样随意建立是意想不到的困难。如(1)式右边那样，用数学式子表示自然现象，除牛顿研究的重力、力学之外，连电磁现象也不能表示。对于其它很多现象，从(1)式的右边，连很近似的实验式都求不出来。

2° 即或(1)式的右边已知，但是一般地不一定可积。这样得到解(2)的表示式几乎不可能。在很多场合，甚至连与已给

初始值对应的近似值都得不到。

由于这种原因，为了了解它的现象，必然要利用不完全的(1)式的右边，以及不完全的近似解。在这里，如果将(1)式的右边稍加变动，(1)的解(2)会不会发生意外的变化，也就是担心辛勤计算的近似解是否确实有用。现在电子计算机的速度很高，对微分方程组(1)的积分曲线的近似值，对于给定初始值是很容易计算出来的，但是完全无意义的计算是难以达到目的的。在这里，把(1)式右边稍做变动，积分曲线的整体性质会是怎样？对此，很有研究的必要。现在以火箭为例，从地球发射的火箭，按发射的方式使火箭分别地落回地球、或成为地球卫星、或者围绕月球与地球的轨道运行，这时对它们的分界限进行研究是非常重要的，其它更细致的问题另当别论，就仅仅做到这一最低限度也是不无困难的。

作为研究这种问题的数学，法国的大数学家和物理学家庞加莱于 1881 年提出定性动力系统的理论。这种定性的动

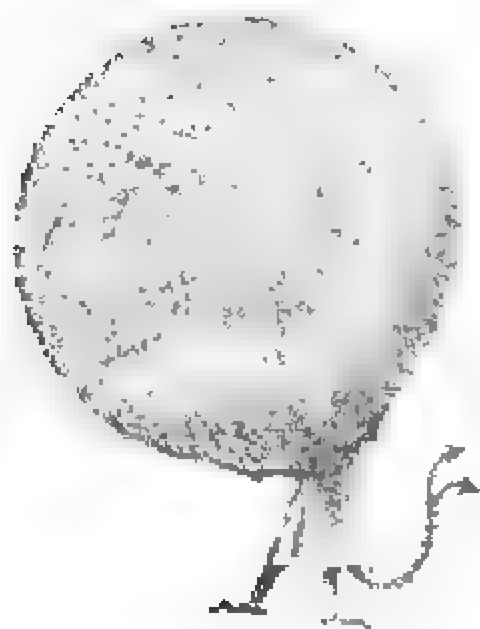


图 13-1

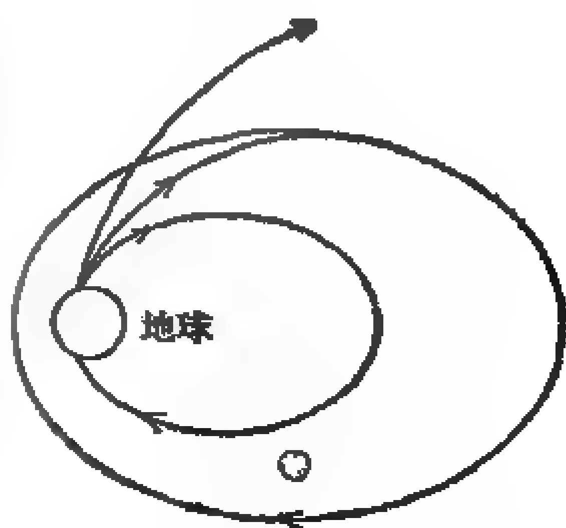


图 13-2

力系统是把对微分方程组(1)的积分曲线的个别研究转化为对积分曲线的整体性质的拓扑研究。所谓整体就是"于是终于……成为"。在上例中，火箭终于落回地球，或终于成为地球的人造卫星，它的界限是终于是否降落。

象这样进行定性的研究，才能放心地用计算机来计算它的近似解。现代数学，特别是由于计算机的发展，对定性的要求更加迫切，因此，这种方法在理论上将才开始，是比较难的理论，实际上是形态形成过程中的最重要的理论。

微分方程组(1)的解，在几何中是从初始点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$发出的$R^7$上的一条曲线。力学的现象，一般地是流形$M$上的曲线，这就是它成为一个几何问题的原因。如果按这种想法，在M上考虑微分方程组(1)，首先是把

$$\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

看做(1)式左边所表示的向量，因为$\frac{dx_i}{dt} = X_i$，所以在M上各点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$都附着一个切向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$，则(1)式可以看做$M$上的**切向量场** X。

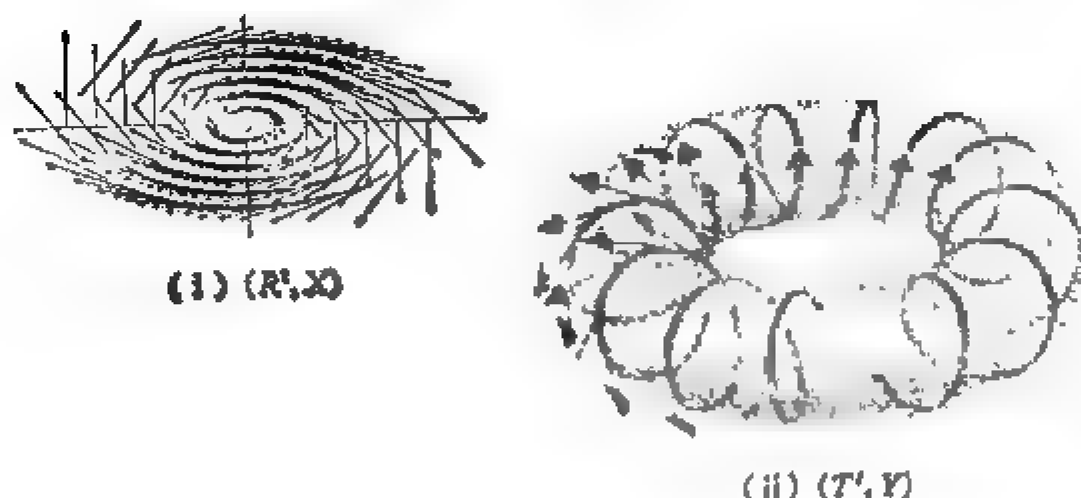
总而言之，某一力学问题可归结为当给定流形M和它的切向量场X时，求出从某点出发且切于该向量场的曲线或轨道的几何问题。在这种意义下，拓扑学也可以说是关于流形M及其向量场X的**动力系统**(M, X)。从而动力系统无非是某力学过程的几何表现。由于向量场的给定方式不同，也引进一些与力学无直接关系的场，因此，它们构成现代数学的独立的体系。

§3 动力系统的结构稳定性

例如取平面上的

$$\frac{dx}{dt}=9y,\qquad \frac{dy}{dt}=-4x$$

等(略去 t,用 2 维来表示)为平面 R^2上的向量场 X,如图 13-3 (i)的 (R^2, X) 是一个动力系统。M 是环面 T^2 的向量场，取如图 (ii) 那样的场 Y，这时 (T^2, Y) 也是一个动力系统。



(i) (R^2,X)

(ii) (T^2,Y)

图 13-3

考虑地球的一部分，画各山的等高线，在地图的各点画出从高向低的方向，与等高线垂直且以它的梯度 (gradent) 为大小的向量，也构成一个动力系统(图 13-4)。

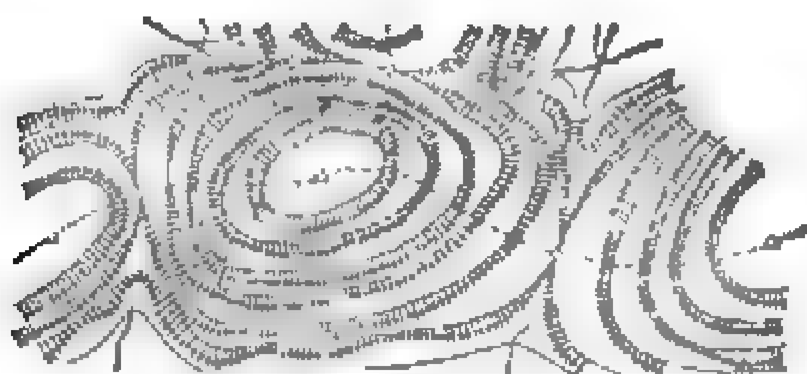


图 13-4

注意到，把平面 R^2 光滑地嵌入于 R^3，将它看做 R^2 沿 z 轴方向正射影的函数，它是可微的 R^2 的向量场。这正象在第

十一章中已经说过的可微函数 $f: R^2 \to R$ 是相同的，因此，所得到的向量场 X 必为函数 f 的梯度，即

$$X = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = -\text{grad} f.$$

当然不仅限于 R^2。取任意的可微 n-流形 M，利用任意的可微函数 $f: M \to R$，令 $X = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = -\text{grad} f$，构成动力系 (M, X)。称之为具有梯度向量场的动力系统，是研究力学性质的最基本的动力系统。

我们在动力系统概念的基础上，当然不是求得原始的积分曲线，而是在假定对那些曲线已经了解的基础上进行研究的。由于微分方程理论的发展，关于解的存在和唯一性已经明确，特殊的如果需要利用计算机在很短时间内计算出任何精度的轨道，这在现在是可以做到的。现在我们可以坦然地对待象这样的一般的假定，做了这样假定之后的问题是，例如对于每棵树木都已精确的了解，那么这些树木会形成什么形态的森林的大范围问题就成为主题。

在动力系统 (M, X) 的拓扑研究中，作为本质的概念就整体来说应当考虑什么呢？简单地对于球面 S 取它的向量场

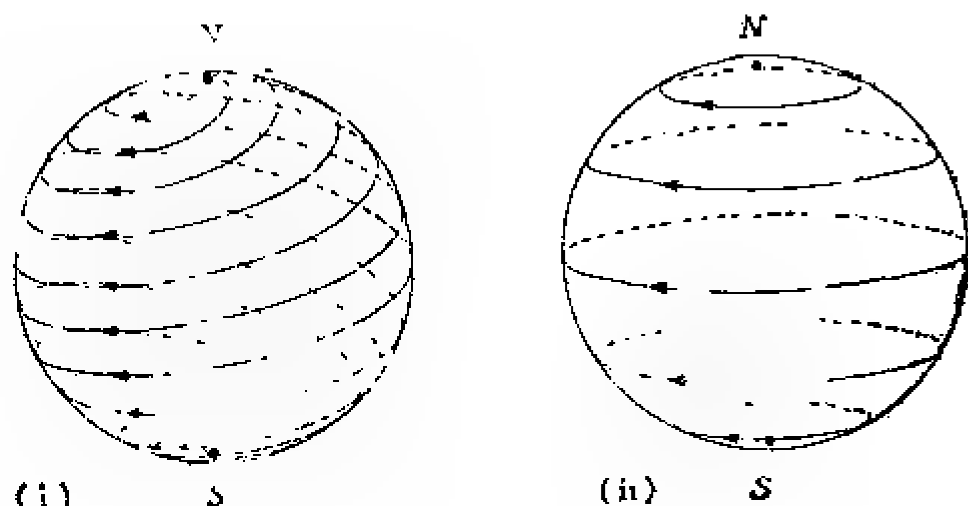


图 13-5

X. 在图 13-5(i), (ii) 的动力系统中，大体上画出代表各个向量场的轨道. (i) 中表示不论从 S^2 的哪一点出发，轨道都向南极 S 前进，到南极 S 停止. 在 (ii) 中，是以平行赤道的平行平面的截口的圆周作为轨道. 对于 S^2 上的这样的向量场，即或少许变化，它与原向量场的状况不变，从这一观点来看，(i) 情形的向量场不论怎样稍有变化，仅仅是 S 的位置稍有变化，不论从哪个点出发的轨道都向着 S 所移动的点的方向前进，终止点仍然不变. 但是若把 (ii) 情形的向量场的所有向量方向同样地向下稍稍改变时，则变为 (i) 的向量场，即平行赤道平面截面的圆周群的闭轨道变为不相似的向量场. 象 (ii) 那样稍经变化(**摄动**)下，样子发生变化，这样的情形不适合于做大范围研究的对象，这种不稳定的情形要除掉. 与此相反，在动力系统的拓扑中，把向量场(任意地)稍加变化仍具有与原来相同的拓扑性质的结构稳定的动力系统以及该系统所具有的稳定的性质作为研究的对象.

到现在为止，实际是进行了轻松的讨论. 这样易于抓住主要的想法. 从理论上来说，对所谓向量场的稍稍变化的正确意义是，在流形 M 的切向量丛中引入拓扑，设它是拓扑空间 B. 这时，由于向量场 X 在 M 上各点都对应一个向量，因此，向量场 X 成为映射 $X: M \to B$. 由于它是拓扑空间，因此映射是连续的，它是前面所提及的连续向量场. 如果 M 是微分流形，则 B 本身也是微分流形. 如果映射 X 可微，则向量场 X 是可微向量场. 梯度向量场是它的典型的例子. 现在在这里把向量场稍加变动，所谓摄动是由连续的向量场，即从 M 到 B 的连续映射所构成函数空间 $C(M, B)$ (这个函数空间是由第八章所说过的列紧拓扑或紧致开拓扑所构成的距离空间)，于是 X 是这个函数空间的一个点，在这个函数空间中由 X 点的充分小开邻域中的点 X' 所确定的向量场为 $X': M \to B$. 可

微向量场也同样地可以看做可微映射的函数空间 $D(M, B)$。这一点很重要，与此有关的问题还很多，为简便起见，我们将按照托姆的想法来讨论。

下面的例子是以映射代替向量场的动力系统。首先考虑环面 $U = B^2 \times S^1$，把 U 到本身的微分同胚(如图)设为 f. 即设想 $U = B^2 \times S^1$ 为弹性体，首先把 S^1 看做是 2 倍长的圆周 S_1^1，B^2 是以 $\frac{1}{5}$ 为直径的圆盘 B_1^2，那么就由它们构成细长的圆环面 U_1，如图，设想它在 U 中，于是存在从 U 到 U_1 的微分同胚 $f: U \to U_1$。其次把 U_1 看做 U，象前面那样，在 U 中有 U_1，把 U_1 的周长拉长二倍，以及由 B_1^2 的直径 $\frac{1}{5}$ 为直径的圆盘所构成的圆环设为 U_2。同样把 U_1 看做 U，则在 U 中有盘旋四周的细长圆环(在 U_1 中盘旋两次)，当 $f: U \to U_1$ 时，把它看做

$$f \circ f = f^2: U \to U_2.$$



图 13-6

下面同样地可把 U_2 看做 U，而在 U_2 中的细长圆环面看做 U_3，则有 $f^3: U \to U_3$，一般地可得

$$f^n: U \to U_n.$$

因为这个动力系统可以用向量场表示，它与上述动力系统本质上是相同的，而且这种叙述方式易于抓住它的特征．这个动力系统对于U的任何点首先映为U_1的点，其次映为U_2的点，…，最后映为细长的U_n．在这里，最后逐渐逼近于图形

$$V = \lim_{n\to\infty} U_n.$$

这个集合V是由叫做局部的康托尔集合的疏空间与线段的直积所构成的.因此,这个动力系统也是结构稳定动力系统之一.

这样的动力系统结构稳定性的概念，是根据火箭、弹道等等工程的要求，于1935年由苏联学者安东洛诺夫（Андронов）和邦特列雅金（Понтрягин）（著名的拓扑学家）所引入的．为了使这个概念成为动力系统的中心概念，当给定流形M时，对构造向量场的方式稍加改变．在M的所有动力系统(M, X)的集合D中，由结构稳定的系统所构成的子集S必须在D中稠密(这里D的拓扑如前所述，利用M的距离来给定)．按这种观点，在第七章中所说的贝尔定理在这里是很适用的．如果S在D中稠密，则在D的任何点的邻域必都存在S的点．因此，任意动力系统都可以用结构稳定的动力系统来逼近，或者从代表的角度来看，仅考虑结构稳定系统，是可以得到大范围的所有性质，这就是保证稳定系统的重要原因．这个问题，当流形M的维数$\leqslant 2$时正确，已由M.派赫托（Peixoto）给出了证明，而当M的维数$\geqslant 4$时不正确，已由斯梅尔给出证明．对于一般情形，结构稳定系统的概念所要求的条件不变，所以它是最强的条件．

§4 稳定平衡点

在这里，对于结构稳定动力系统的概念必须进行深入的

研究．为此，我们把动力系统用微分方程（1）表示，考虑它的解(2)的大范围的渐近性质．解(2)的积分曲线 $h(t)$，当 $t\to\infty$ 时，它趋近于某点 q，把这个点叫做该系的**平衡点**．而且通过平衡点 q 邻近的任何点 p 的积分曲线也必趋向于点 q，当决无从 q 发出的积分曲线时，点 q 叫做该系的**稳定平衡点**．在图 13-5(i) 所表示的球面动力系统中，点 S 是稳定平衡点，在前面圆环面的动力系统中，子集 V 的各点都是稳定平衡点．若这样的稳定平衡点 q，当向量场做充分小的摄动时使 q 变动为与它邻近的点 q'，则称之为**结构稳定的**．前面提到的球面、圆环面的稳定平衡点是结构稳定的．又如地图的等高线所构成的梯度向量场的动力系统，它的稳定平衡点都是结构稳定的．湖（不再流入河），海的最深点也是这种结构稳定的稳定平衡点．但是从圆环面的动力系统的例子中可以看到，结构稳定的稳定平衡点在空间就非常复杂．这是一个难点．

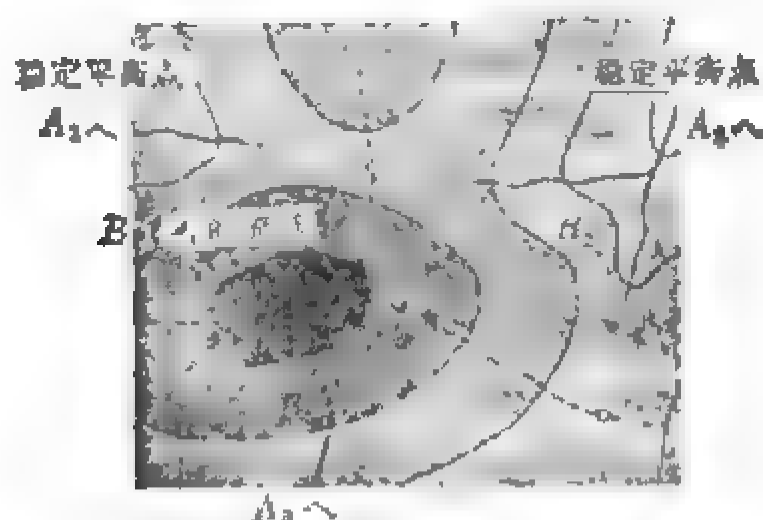


图 13-7

可是，如同梯度向量场那样，结构稳定的稳定平衡点是单纯的点的情形也很多．首先，作为理论的第一阶段，打算先处理这样单纯的动力系统．最近，苏联的数学家阿诺索夫(Аносов)和美国的拓扑学家斯梅尔，以这种考察为基础，首先

定义所谓一般的阿诺索夫稳定平衡点的结构稳定的概念，在某种限制的基础上，这种稳定平衡点构成闭周期轨道或闭殆周期轨道，而且一般地是在高维空间，这种结构比较易懂，而且指出了它常为有限个.

在所论述的动力系统中，还有一个重要的概念，那就是稳定平衡点的流域. 以图中的梯度向量场为例，这里是四条河的河源，雨水流入河中，河水向稳定平衡点，即向湖或海方向流去. 在这里仔细地观察，降在哪里的雨水向哪个稳定平衡点流动. 如图那样画出分水岭，由它们划分成四个部分 B_1，B_2，B_3，B_4，它们是向不同河流流入的区域，即表示各个稳定平衡点的流域.这些流域把集合M分割开来，因为在某流域中的某点是向着它的稳定平衡点方向前进的，由流域对M的分割赋予这个动力系统的定性行为的全体以完全的特征. 我们观察自然的地形，它的分水岭，如图那样意想不到的是几何(部分是可微的)曲线，这不能不使人们惊叹.

若这个流域成为梯度向量场的动力系统，则它是比较单纯的空间，而且由流域对M的分割在结构上是稳定的，可是在一般的动力系统中，包含着结构不稳定的非常复杂的情形.在这种动力系统中，从某一点发出，而发展的结果如何是不确定的. 这种事实就是在完全确定的系统中，在结构稳定的系统中，对它进行结果的定性猜想也会出现完全不确定的情形，这是哲学地揭示了的重大事实(以身边的事物为例，即在投掷硬币时，预先猜想是表还是里，这与上述现象是一致的). 象这样对复杂流域分割的例子，如图 13-8，用实线来划分 B_1，B_2 的流域，点 S 是第十二章中说过的鞍点，而 a_1，a_2 是稳定平衡点.分水岭逐渐向圆周C渐近地卷曲.于是邻近C的点当向量场稍加变动时，则属于流域B_1的点，有的立刻变为属于B_2的点.反之，也是一样，不确定性必然地在结构稳定中有所体现.

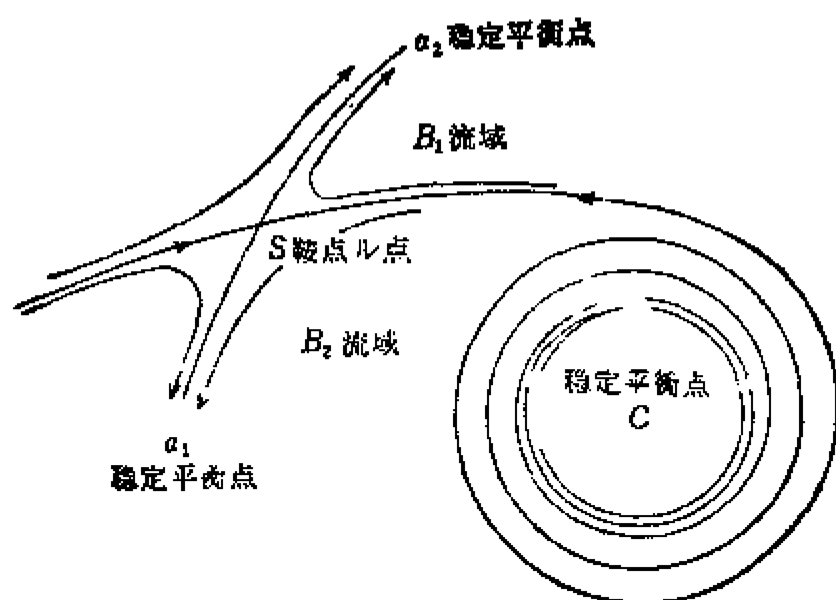


图 13-8

§5 结构稳定映射

到现在为止，已经阐述了用动力系统（M，X）表示物理现象以及生物化学现象的思想方法．大部分是针对当时的目的而进行的（决不是胡来），即，M上的决定论即或不能用（M，X）完全表示出来，但是在M的局部U上是可以做到的．而对于完全表示，也有由于现状的复杂而不可能做到的情形．

尤其是，对于梯度向量场，有时把向量场X以可微函数$V: M \to R$来代替，考虑问题比较方便．

在这种理由下，代替动力系统取M的局部U，利用从U到某维数的欧氏空间R^m的映射$g: U \to R^m$的集合族．在这里的U，当M的维数为n时，只须取n维欧氏空间R^n就可以．即可把动力系统（M，X）看做可微映射族$g: R^n \to R^m$，亦即从R^n到R^m的可微函数空间$D(R^n、R^m)$的子集．这时，所谓在（M，X）上X的摄动是把$g: R^n \to R^m$，用和它们充分近的$D(R^n, R^m)$的元$g': R^n \to R^m$来代替，这时g与

g' 是否同胚？使向量场的摄动与结构稳定性相对应．关于可微映射，大都由微分拓扑学家在进行研究，因为它与梯度向量场有关联，特别是对于可微函数 $V: M^n \to R$ 的一些结果介绍如下：

首先，在微分映射 $V: R^n \longrightarrow R$ 中的主要问题是，在第十二章中说过的临界点，或叫奇异点．在这个点处所有的偏导数 $\partial V/\partial x_i = 0$．把它放在梯度向量场中，它成为平衡点．问题是什么样的奇异点是结构稳定的？答案是如第十二章说过的，当把变量适当地改变时，在点 p 处，函数 V 可以写做

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 = V - p$$

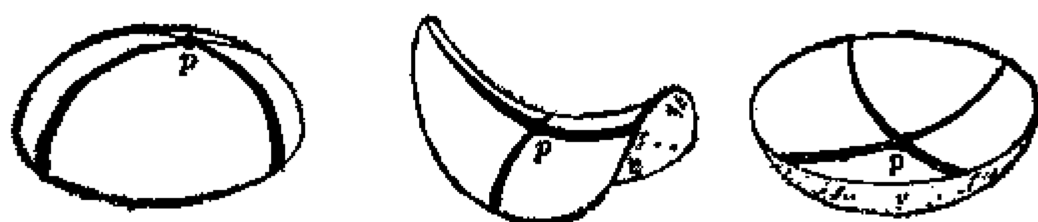


图 13-9

的非退化临界点是结构稳定的奇异点．特别是 $V: R^2 \to R$，在非退化临界点 p 的邻域中，V 有下列三种情形．

若 R^n 的点 p 是结构不稳定的奇异点，加上比 $V: R^n \to R$ 小的且它的高阶导数均为 0 的可微函数 δV，然后再进行摄动，得到函数 $V + \delta V$ 的拓扑型，它可分为由有限个可微函数的线性组合表示的有限维余维数与不能表示的无限余维数两种情形．有限余维数的奇异点就是前面已经确定的稳定平衡点．例如，令 $V: R^n \to R$，当 $n = 1$ 时，$V = x^3$ 在 $x = 0$ 是奇异点，对于摄动后函数的拓扑型为 $x^3 - x$，变为 $x^3 + x$，即为可能出现凹或不凹的情形，这时的余维数是 1，参照图 13-10．与之相反，指数函数

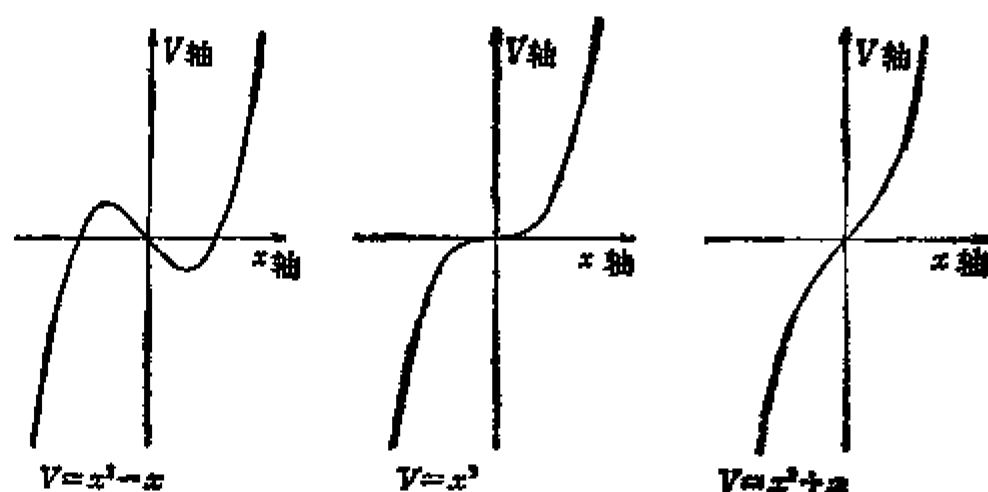


图 13-10

$$V = \exp\left(\frac{-1}{x^3}\right)$$

是无限余维数的．对这方面稍做细致的论述．首先，

$$f: R^n \to R^m,$$
$$(x) \to (y)$$

是可微函数，但 $f(0)=0$，$x \in R^2$，$y \in R^m$．这时可微映射

$$F: R^{n+k} \to R^{m+k},$$
$$(x, v) \to (y, v)$$

是 $F(x, 0) = f(x)$，即当 F 的限制为 $F|R^n = f$ 时，F 称为 f 的 k-参数变形．

因此，给定的可微映射 f 的所谓**广义开折**（unfolding）是 q-参数变形的族 $\{G\}$，但是这个变形族具有下列性质：当任意给定 f 的 k-参数变形 F 时，存在由 G

$$(x, \varphi(v)) \xrightarrow{G_1} (y, \varphi(v))$$

所构成的变形，G_1 与 F 具有相同的拓扑型的微分映射

$$\varphi: R^k \to R^q,$$
$$(v) \to (u).$$

在这里所谓 F 与 G_1 具有相同的拓扑型，即在下列的图式下的

合成映射相同，也就是

$$h'G_1 = Fh$$

与 u 有关的局部微分同胚 $h: R^n \to R^n$ 以及 $h': R^m \to R^m$（在各个点的邻域中如微分同胚那样的满射的连续映射）存在。如果

$$\begin{array}{ccc} (x, u) & \xrightarrow{G} & (y, u) \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ (x, v) & \xrightarrow{F} & (y, v) \end{array}$$

则在可微函数 $V: R^n \to R$ 下，v 为奇异点，且它的有限余维数为 k，这时，这个广义开折 G 记作

$$G(x, v) = V(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i, \; u_i \in R.$$

这里 g_i 是可微函数 $g_i: R^n \to R$。

重要的是，在稳定平衡点处，函数 V 的摄动与在 $G(x, u)$ 中经 $u \longrightarrow v$ 置换后的函数相同；即 V 的摄动完全由 u_i 与 g_i 给出。例如，$V = x^3$ 的广义开折为 $V = x^3 + ux$，$u \in R$。

这个广义开折在生物学的模型中起着中心的作用，这个概念到目前为止，遗传学家以及分子生物学家还是含混地使用信息的概念。现在对它给出正确的说明。即这种信息是在 $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ 所张成的外部空间表现出的形态中的译码(decode)。

对于余维数不超过 4 的所有稳定平衡点列表如下，它们都是下面所说的时间空间中（4 维欧氏空间）结构稳定的重要对象，在 4 维空间取动力系统，称之为**基本的突变**。

这些基本的突变是受古典光学中费尔马(Fermat)变分原理支配的，它表示在传播过程中波面的结构稳定的奇异点。因此，这些奇异点可以作为光线的奇异点而得到实现。

	余维数	名称	组织中心	广义开折	在空间的俗称	在时间上的俗称
一维 $V:R\longrightarrow R$ 的情形	0	最小值	$V=x^2$	$V=x^2$	茨裂	连续
	1	折　弯	$V=x^3/3$	$V=x^3/3+ux$	边	终了开始
	2	尖(cusp)	$V=x^4/4$	$V=x^4/4+ux^2/2+vx$	折段	分开合并
	3	燕　尾	$V=x^5/5$	$V=x^5/5+ux^3/3+vx^2/2+wx$	断裂	剥下不均匀
	4	蝶　形	$V=x^6/5$	$V=x^6/6+x^4/4+ux^3/3+vx^2/2+wx$	鳞片	充满空
二维 $V:R^2\longrightarrow R$ 的情形	3	抛物的脐	$V=x^3+y^3$	$V=x^3+y^3+wxy-ux-vy$	凸起	破吸入
	3	椭圆的脐	$V=x^3-3xy^2$	$V=x^3-3xy^2+w(x^2+y^2)-ux-vy$	针毛	开洞埋洞
	4	双曲的脐	$V=xy^2+y^4$	$V=x^2y+y^4+wx^2+ty^2-ux-vy$	喷射口	开破口 闭破口

第十四章　形态形成论与模型

§1　决定论与结构稳定性

在第十三章的开头，对于形态形成问题解释的前半部分“外部现象至少受局部决定论所支配”的说明，已在第十三章中阐述完了。现在我们讨论它的后半部分，它的后半部分是“关于生物的大域的时间空间结构的稳定性，可利用它的结构组织给出说明”。

在我们周围的环境中，决定论所涉及不到的，由于初值微小变动而产生非常不稳定的现象很多。例如，在对称形的澡盆中注满水，打开澡盆底部中央的放水栓。不用说，水要从底栓孔流出，这时水逐渐做旋转运动，这个转动方向是右旋转还是左旋转？（把地球旋转看做静止的）实际上仅由剩余的水的运动状态来确定。可是即或除掉这些外部原因（实际上是除不掉的），水仍然在哪儿逐渐旋转，在完了时发出叫声而流出。究竟是右或左旋转完全不以眼睛看到的为转移，而决定了水的初期状态，一经被确定，必然地不停顿地运动。而且当把初始条件稍加变动时，则向着相反的方向按自然的状态旋转。在什么地方旋转，我们尚无数据来确定它的性质。这恰好与旋转次数一样地不能断定，这个问题是属于拓扑学以外的概率统计分支的问题。

这样，我们被无数不可理解的现象所包围，也象分析学中求解那样，要求它是初始值的连续函数，至少不管是否稳定，首先建立起在“大体上”，“一般的”范围的理论。

某形态现象，当初始值做微小变动而具有稳定性时，称这个过程为形态形成场的支集，或者用 C.H. 维丁顿

(Waddington)的术语来说，即这个过程可用 chreod 表示出来。于是形态形成论把给定过程产生某确定的形态，在它的场中做出相适应的模型，用结构稳定的方法给出证明就可以。(在后面还要给出正确的说明。)

自然的形态过程是，把形态形成场的支集上过程的部分首先分离出来，这样能鉴别出过程的 chreod 是非常重要的。可以把它看做是由不稳定性或不确定性带所切割出来的决定论的区域。所谓这一事实能成立，等于说该形态多少是可描述的。实际上，大多数的自然过程指出了形态在局部上的正则性的程度，它们与由语言多次反复指定出来的元素有区别。不用说，不是这样的过程，完全是混乱的，是无法表达的。例如，流体力学的扰流就是这样，对于这一过程是无法叙述的。

在欧氏空间 R^m 中所进行的形态过程的这种分割，因为可以把它看做一种一般的 m 维语言，托姆把它叫做**意义论的模型**。实际上我们日常所用语言无非是1维(时间)的意义论的模型，它的 chreod 是我们的语言。

现在，假定已给出意义论的模型，可以考察下列两类问题：

i) 明确 chreod 所有的型，理解保证它们稳定性的力学过程的性质。

ii) 与一些 chreod 有关连的过程，它本身是结构不稳定的(如果稳定，可由一个 chreod 把它叙述出来)。我们常常处理我们所熟悉的过程的集合。这时，一般地，常表现为 chreod 的连合的组合。这种连合可以说是控制意义模型的**多元文法**。于是问题是描述这种文法，恰如在语言学中使文法规则形式化那样使它形式化。

为此，首先是构成 chreod 的辞典。其次，如语言学家所说的，有必要做出给定语言的全集。即从自然界的形态过程的统

计资料中抽取出来而构成这个全集，这是实验学家们的任务。从而定量的生物学家一方面做形态过程的统计，同时也做这种工作。物理学家以基本粒子物理的散射实验做同样的工作。对这样的资料的解释问题，以及从其中提取抽象的理论等等，一般是非常困难的，完全相当于对未知语言的解释。

在这里，返回到日常的语言上来，考虑语言的解释是什么。这个问题在柏拉图（Platon）著名的《对话录》（Cratylus）中已经谈过，这与从单词的发音结构中怎样得到它的意义是同样的问题。这时，单词的结构与它的意义之间的关系，只能由长期历史的作用，逐渐分离而不能理解来说明。很多自然现象，特别是无生物的现象中，完全不象日常用语那样任意编码（coding），从 chroed 内部结构中多少能直接地得到保证 chroed 稳定性的力学。如果是生物学，则是中间的状况，在某种情形下，它的形态过程比较容易做出力学的解释，但在某种情形下，由于对生物的过去过分注意遗传因子活动力的表现过程，所以做力学解释非常困难，且是很累赘的事情。

§2 动力系统模型

把前面说过的形态形成论的想法，首先在简单的化学反应中，用很粗糙的力学的模型给以说明。在某个箱子中分别装人氢氧气，并以隔板隔开。当把隔板抽出时，箱中两种气体充分扩散。因此，在两种气体共存的地方发生化学反应而产生水蒸气。如果都装进适当量的两种气体，则在箱中充满了水蒸气。把这个过程以图来表示。为简单起见，用线段 AB 来表示箱子，在端点 A 是氢气，在端点 B 是氧气，于是当 $t=0$ 时，看做已把隔板抽出，随时间的推移，该过程如图 14-1。

把这个形态形成过程以线段 $AB\times$ 闭区间[0, 4]的正方形来表示，把质的变化象征地表示如图 14-2 那样的两个对角

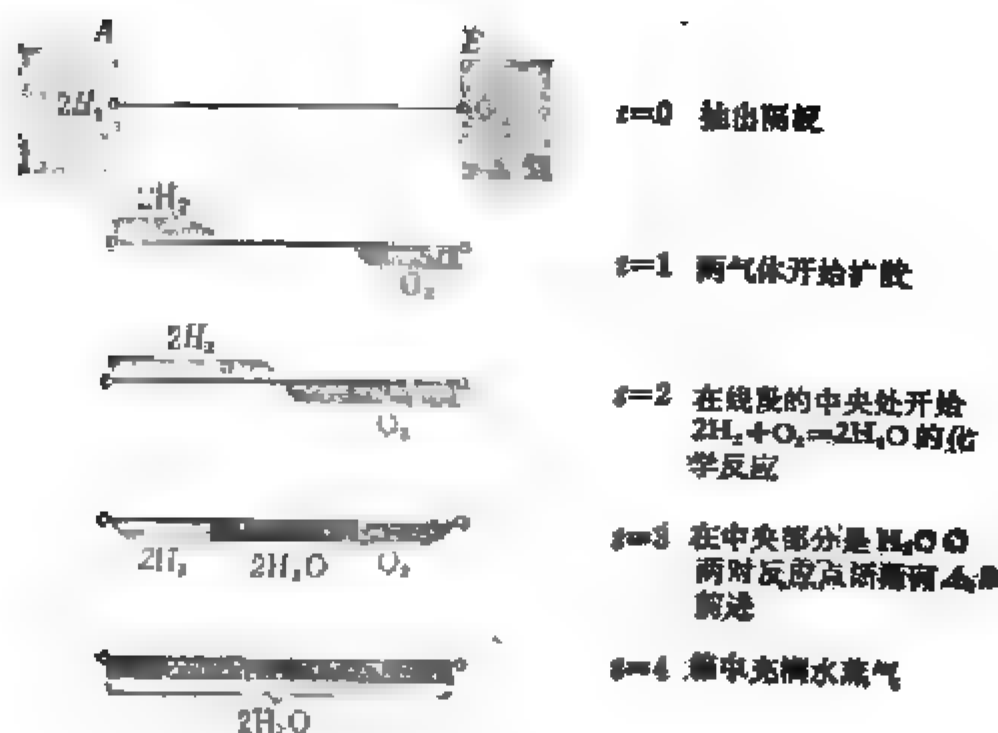


图 14-1

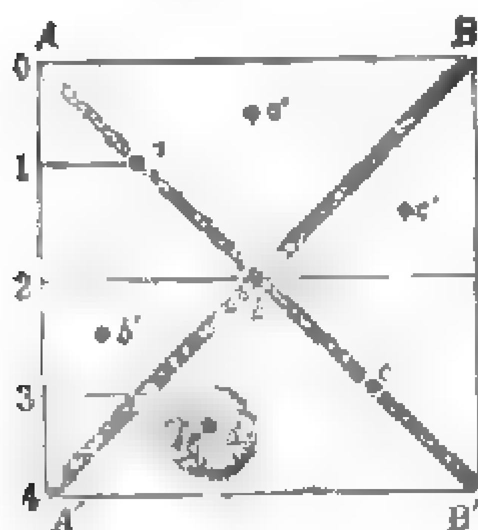


图 14-2

线.

当时间小于2时，对角线 AB' 上的点，例如 a，从真空的状态变为充满氢气的状态，无质的变化. 在两对角线的交点 b，这时被氢气与氧气所充满. 发生 $2H_2+O_2=2H_2O$ 的化学质变. 这样，在 AB' 对角线上的、时间 ≥ 2 的点，例如点 c，它

与 b 一样发生着变化。

与此相反，在对角线以外的点，例如点 a'，仍然处于真空状态，没什么变化。又点 b' 的邻近的状态，一样是由氢气充满的状态，所以无变化。又如在 c' 的邻近，同样处于充满氧气的状态，与邻近比较，无变化。同样，点 d 是充满水蒸气的状态，它的邻近的状态没有任何变化。

象这样例子，一般地在某时间空间的 4 维欧氏空间 R^4 中进行某过程，当 R^4 的点 x 与它周围的点有同样的状态时，详细地说，如果取以 x 为中心，以充分小的 r 为半径的 4 维球 $B(x, r)$，则这个球体中的点的状态都相同。在这个球体中不发生任何过程的变化的叫做正常点。不是这种点 x，即不论取怎样小的 4 维球 $B(x, r)$，其中总有表示不同状态的点，即存在突变点(变动点)。上例中，四边形对角线上的点都是突变点，其它点是正常点。

上例中，确定形态形成的局部决定论是气体的扩散与 $2H_2O = 2H_2 + O_2$ 的化学反应这两者。这些恐怕(某一天)都

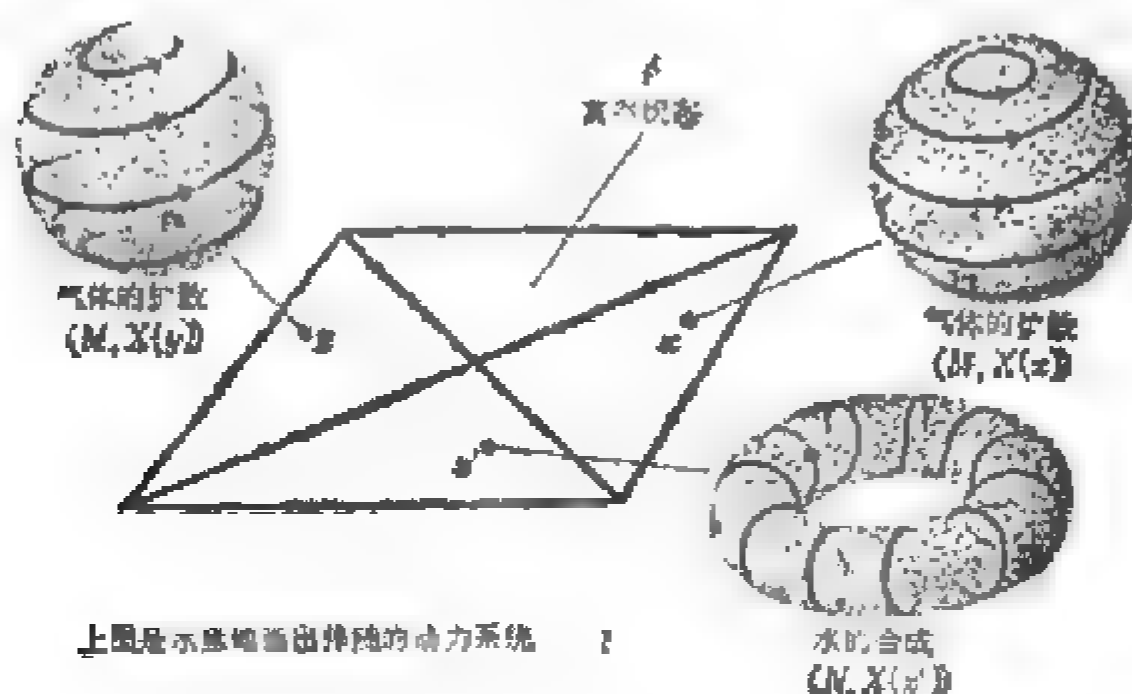


图 14-3

能用微分方程组把它表示出来．即或不能，也可以近似地看做某流形M上的向量场X．即可以看做在正方形各个点都伴随着一个由该点的局部决定论所确定的动力系统（M，X）．参看图14-3．

从上面可以看到，在时间空间的4维欧氏空间R^4的某邻域U中，当进行某形态形成的过程时，在U的各点x伴随以某流形M的某向量场$X(x)$，来规定在x点邻近的变化．自然地，若x稍稍变动为x'，则M上对应的向量场也稍稍摄动而慢慢地变为$X(x')$．当点x的状态在对应向量场$X(x)$某平衡稳定的流域上，这个点的状态就表示该流域的本质状态．象这样U上的点都是正常点．但是随着时间的推移，点x发生变化，向量场$X(x)$也发生变化，这时点x所具有的平衡稳定性消失，而出现新的稳定平衡．这是点x在该流域中所具有的．这意味着点x的状态的质的变化．于是，旧的稳定平衡消失而x在新的稳定平衡流域中瞬时的点叫做**突变点**．区域U被冲击波分为若干小区域(突变点的集合叫做冲击波)．上面例子被分为4个区域．

由此可知，在动力系统模型中的基本现象是把结构稳定的稳定平衡用向量场的变动来消灭的．这一事实，庞加莱早在力学的组成部分的分裂理论中进行过研究，这个理论人们不很熟悉．

现在我们假定，我们周围的介质以及作用于局部动力系统的力的物理性质都不变，而且任何形态都是这种分裂现象的结果．这种想法是由达西·陶普孙(d'Arcy. Thompson)首先提出的．在1940年左右C.H.维丁顿以及Max．德尔布鲁克(Delbrück)等研究细胞分化时曾利用了它．

可是，当对这种突变点进行详细研究时，可分为两类．一类是**正常突变点**x，在该点以x为中心，以较小的r为

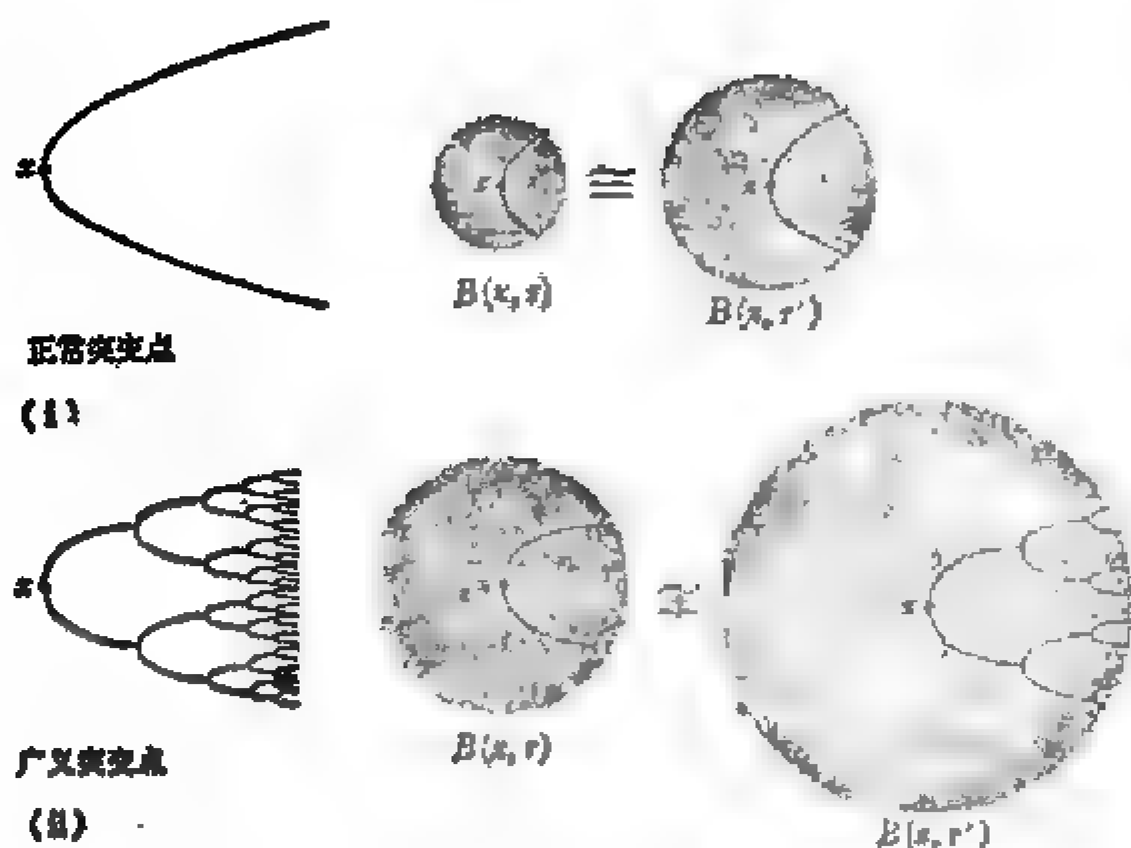


图 14-4

半径的 4 维球 $B(x, r)$ 上的状态和 r(当然很小)变为 r' 的球 $B(x, r')$ 上的状态，拓扑等价的情形。但是如果由于半径取法不同而出现不同状态，则这种突变点叫做**广义突变点**。因为 4 维看不见，用平面示意地给出说明。如图 14-4(i)，在点 x 的突变以过 x 的抛物线来(示意地)表示。这时，不论取什么样的半径，$B(x, r)$ 球上都具有同胚的突变的图形。与此相反，在图(ii)的点 x 处的突变，如果半径改变，则在 $B(x, r)$ 上的突变图形完全不同。即(i)的点 x 是正常突变点，而图(ii)的点 x 是广义突变点。因此，广义的突变形成奇怪的形态形成，一般说来，它不是结构稳定的，这不是我们研究的对象(前面提到的化学反应的突变点都是正常点)。

在这个力学模型中考虑前面说过 chreod 是什么。在 R^4 的区域 U 中所进行的过程可以从它的突变点集合 K 的形状

得到概略的理解。在这里，因为集合K代表过程，而着眼于K，当集合K是（即K为突变集合的过程）以某U为支集的一个 chreod 的扩张，是在U上给出与前一初始值充分近的任意初始值时而得到的过程时，则得到 K' 这个突变集合。于是，$h(K)=K'$，这样确定了当U仅仅变动一点时与它同胚的 $h:U\to U$ 存在（在这里出现充分近和仅仅动一点的术语，这要取适当的空间，因为在这里用到了距离）。

前面的化学反应的例子是象征性的，即把初始值，亦即将开始给定的氧气与氢气的量改变一下，例如设给定氢气为氧气的 2 倍稍多一点，过程如图 14-5 表示的那样来进行，最小限制到 $t\leqslant 4$，突变集合 K' 与前面的K相同（正确地说，因为存在 $h(K)=K'$ 的 $h:U\to U$），这个K可以说是用 chreod 表出。（$t\geqslant 4$ 时，氢气与水蒸气开始扩散混合，而它是与前面不同的过程。）



图 14-5

因此，这个 chreod 代表 H_2 与 O_2 的化学反应的基本的形态形成过程。

关于分裂理论的研究，以及它与突变的关系，直到现在只对局部动力系统(M,X)为梯度力学的情形进行了研究。而这时分裂理论已成为结构稳定映射的理论。要用到奇异点的

广义开折的概念。即当函数(M,X)为函数$V:R^n \to R$的梯度动力系统时，设它的广义开折为

$$G(x, v) = V(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s g_s,$$

$u_s \in R$, $g_s:R^n \to R$, $s = 1, 2, \cdots, k$, 由$u = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$所表示的广义开折的外部变数所构成的 k 维欧氏空间R^k，叫做广义开折空间。在这个空间中象下面那样稳定平衡点(函数 $V:M \to R$ 的极小值点)之间的矛盾由冲击波(分水岭)给出。普遍开折空间R^k的点属于函数$V:R^n \to R$的最小值的稳定平衡流域(麦克斯韦尔(Maxwell)原理)。根据这个法则，$V:R^n \to R$，使在前面所说的所有有限余维数的奇异点，在 R^k 中与以V为组织中心的广义突变集合K对应。于是在过程进行的R^k的区域U的某点w上，支配该点的局部内部动力系统具有 $V(x)$ 的奇异点，于是一般地在这个点w所表现的形态，由某映射 $h:U \to R^k$ 所确定。在这里映射h具有使R^k的广义突变集合K与$h(U)$的交点尽量少的性质。即在U的点w处，逆象$h^{-1}(K)$表示$V(x)$分裂的结果。粗略地说，以$V(x)$为组织中心的形态过程由普通模型K给出，在w邻近构成形态形成场，由于诱导的形态$h^{-1}(K)$可用 chreod 来叙述。在后面将要提到，广义突变集合$K \subset R^k$作为空间是比较简单的多面体。因此，在映射 $h:U \to R^k$下$h(U)$与K具有交点尽可能少的性质(横截性)，从而诱导的突变$h^{-1}(K) \subset U$是比较简单的空间，这是正常的突变点的情形。

为了这样诱导突变点，把区域U局部地分极化，即在点w的周围确定某种坐标系，给与和R^k坐标系的对应，这个对应必然给出映射h。当U是生物的组织时，则可能有这样预备的组织分极化，这种假定是由查尔德(Child)提出的胚态发生学的梯度理论，这个力学模型是这一立场的证明。

如果区域U在点w的周围不能充分地分极化，则映射h对于广义的突变集合K不具有横截性．它所诱导的形态$h^{-1}(K)$非常复杂，成为前面已经提到的广义突变点．一般说来它是结构不稳定的．

上面所阐述的是内部局部动力系统，是梯度力学情形下的分裂理论与形态形成场之间的关系，关于此外的动力系统的分裂理论尚未解决，我想大体上也象梯度力学的情形那样来进行研究．但是，这时，对于已分极化了的媒体也产生广义的突变．

以下，对于梯度力学的两三个正常突变的和广义突变集合进行概略的研究．

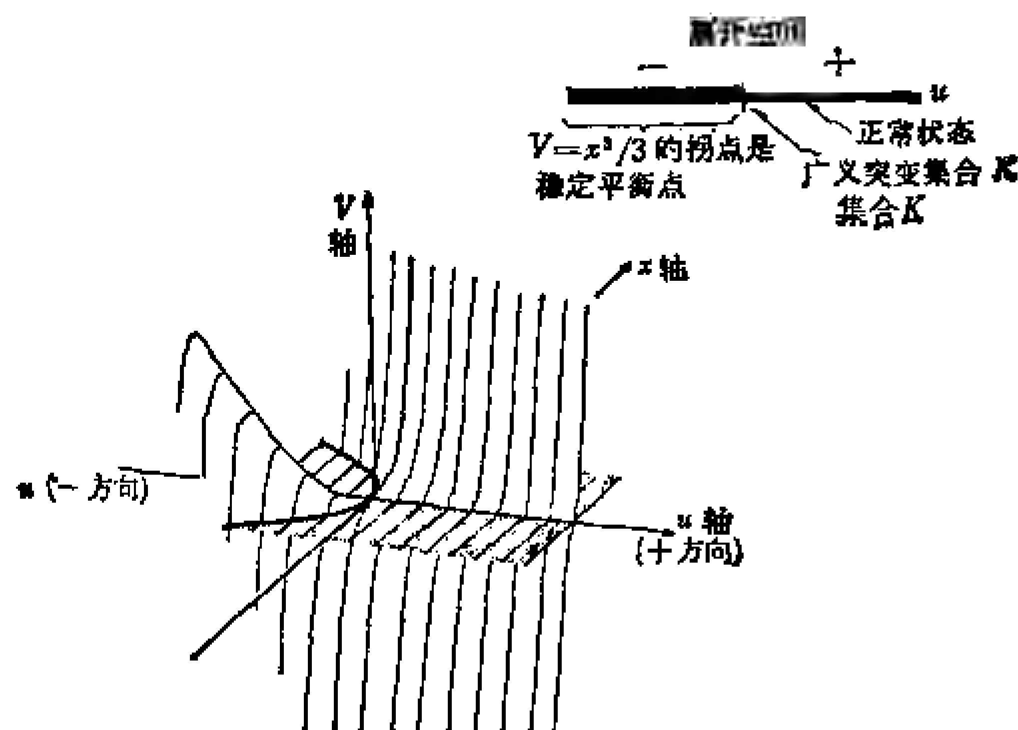


图　14-6

当组织中心为$V=x^3/3$时，在它的普遍开折

$$V=x^3/3+ux$$

中，它的图象如图14-6，即取从u的一方向到＋方向，经历一段时间后，在到达组织中心之前都是正常点，当到达组织中心

以后，在图中用粗线所表示的是稳定平衡的继续. 把这种状态以 u 轴所构成的开折空间来表示，当 $u=0$ 时，出现突变点，其后可以说不论 $u>0$，或 $u<0$ 都产生不同的变化状态(叫做引起稳定平衡).

同样，下面在叫做尖点(cusp)的突变点处进行研究. 在这里 $V:R\to R$ 为 $V=x^4/4$，它的广义开折为 $V=x^4/4+ux^2/2+vx$，这时，所谓余维数为 2 是指有两个外部坐标 u，v. 这个广义开折的图象虽然画不出来，可是在它的外部变数 u，v 所构成的开折空间中，在尖点邻近处的稳定平衡的边界，如图 14-7. 以 $4u^3+27v^2=0$ 曲线作为尖点的集合，它构成广义的突变集合 K. 在这个 K 中把 (u,v) 平面分为两个部分，如图，较广的区域 V 取最小值(V 的图象中涂黑的点的部分)，在尖点所围成的区域中，V 的极小值有两个，它们相互

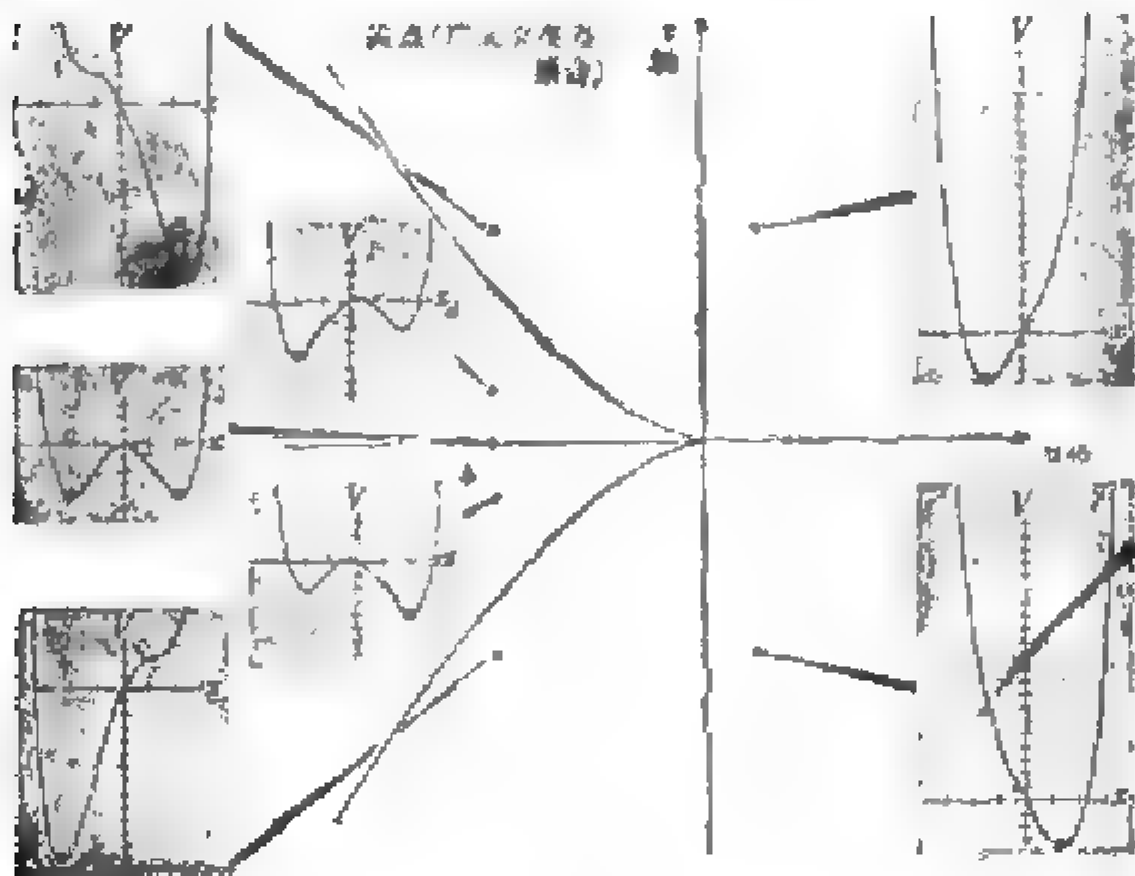
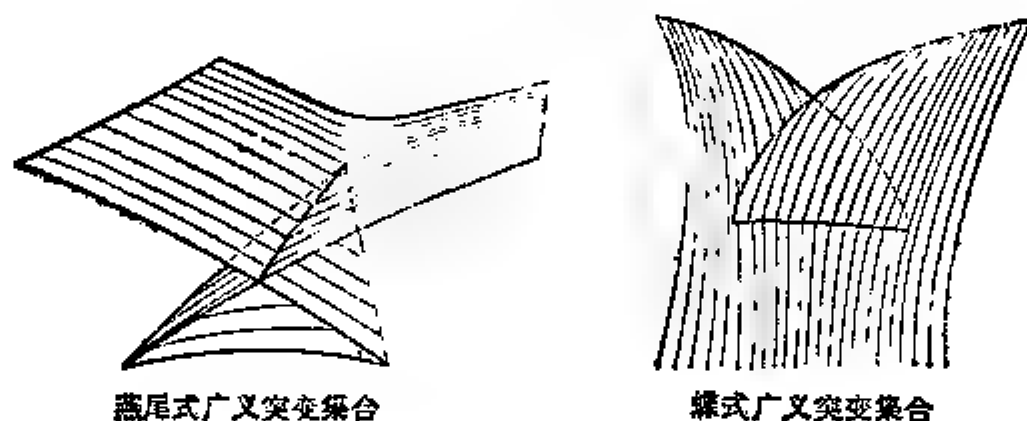


图 14-7

牵引. 当 $v > 0$ 时,其一极小点为主要稳定平衡点,而 $v < 0$,

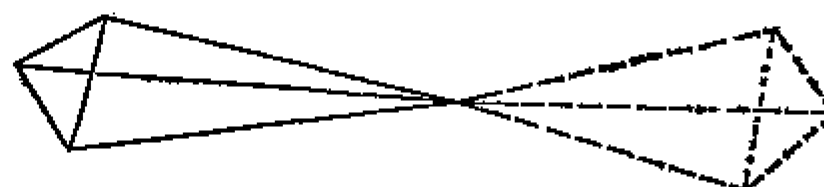


燕尾式广义突变集合　　　　蝶式广义突变集合

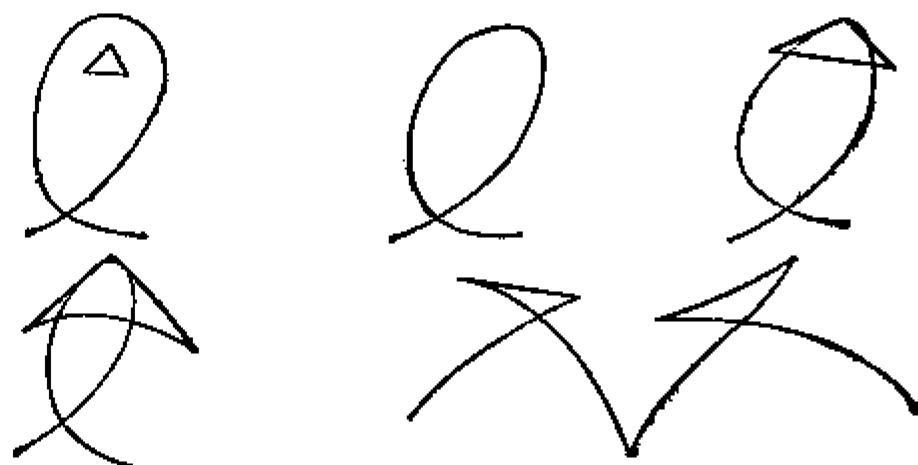
图 14-8



双曲脐式广义突变集合的截面图(阴影部分是稳定区)



椭圆脐式广义突变集合(虚线部分是不稳定区的边界面)



抛物脐式广义突变集合的截面图

图 14-9

另一极小点为主要稳定平衡点，在 $v=0$ 的线上，两者的力相同，则产生不稳定的状态。

象这样，在 R^4 中的正常的突变集合预计它对于无生物、生物的形态形成方面能起重大的作用。特别是叫做 2 维脐式的突变点，在生物中，于繁殖方面据说起很大作用，上面作出它的略图。

最后，考虑某种生物，设在这种生物的某点 w 处局部力学具有组织中心 $V(x)=x^4/4$的奇异点。因此，这种局部力学受来自广义开折空间的强烈影响，确定了与开折空间的各稳定区域对应的动力系统的向量场的分量 U，V。即如图 14-10 那样 $h(w)=(u, v)$，设该点动力系统的向量的 u，v 分量为常数 U_0，V_0，只是当 $v>0$ 时，$V_0<0$，而 $v<0$ 时，$V_0>0$，因此都取 $U_0>0$。

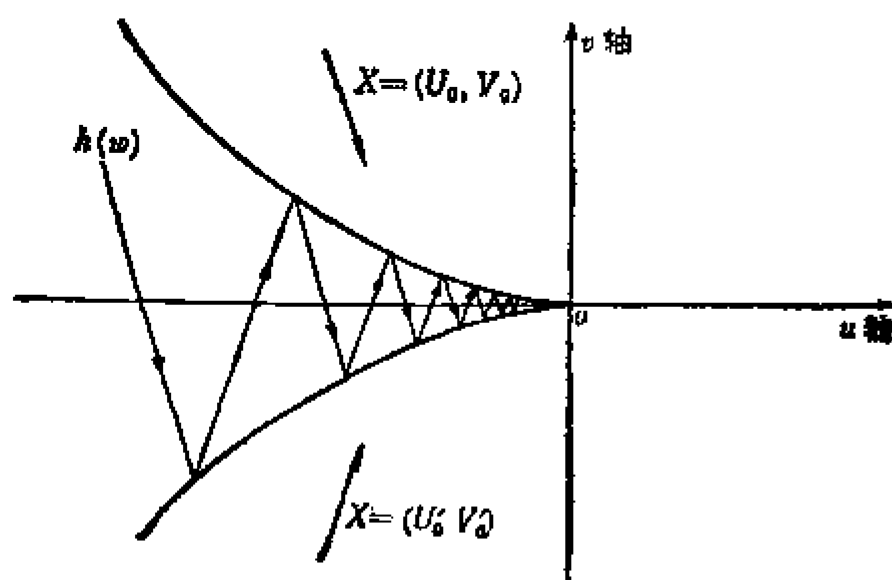


图 14-10

于是，生物体 w 的象 $h(w)$ 进化恰巧与广义突变集合尖点的内部相对应。这时 w 的进化如图所给出的那样在向量场内振动向着尖点即原点前进。所谓 $u=h^{-1}(o)$ 生物体的

点 u 与组织中心 $V(x)$ 相对应. 这个模型不仅仅是由生物体的组织中心发出的，它还表示构成组织中心结构稳定的再形的成结构的最简单的模型. 它将在下面的生物模型中有用.

§3 生物学模型

力学的模型，在说明物理学的现象时是非常有用的. 这里所说的生物学的模型是说明植物、动物等的形成、发生等等机构的模型.

a）静态模型

生物的新陈代谢系统的局部决定论，是假定局部地表示为一个函数空间. 在力学的模型中具有局部的向量场，在这种情况下，限制新陈代谢系统的局部发展的决定论，受所谓 $V:M\to R$ 函数的集合限制.这个函数空间以 $L(M,R)$表示. 因此，在函数 $L(M,R)$ 中，有由偏导函数表示最复杂状态的函数(最退化的函数) w.这个函数 w 表示生物体的胚态状态. 因此，现在所考虑的生物体M就设想是卵，设限制在它的某点 o 的 $L(M,R)$ 的函数是 w. 这样，w 在该点 o 处就成为前面谈过的力学模型中的有限余维数的孤立奇异点，并设这个奇异点的广义开折空间为 R^k. 于是，这个卵的(3 维球 B^3)关于时间所发生的状态可用

$$F:B^3\times T\to R^k$$

来表示. B^3 是含 o 的 3 维球，T 是时间的区间. 当广义开折空间 R^k 的广义突变集合设为K时，与前面一样，对于各个 t，$F_t=F|B^3_t\times\{t\}\to R^k$ 的限制映射具有横截性. 于是与动力系统的情形同样地，卵由 $F^{-1}(K)$ 所给定的突变而完成细胞分化. 一般是要随细胞不断地分裂而卵的形体逐渐增大. 但是不久，当这个卵达到了成熟阶段时，象 $F_t(B^3)$ 的某部分经过结构稳定过程而返回到组织中心 w. 这样来说明卵的配

偶子的形成，将这种状态可概略地表示为下图。

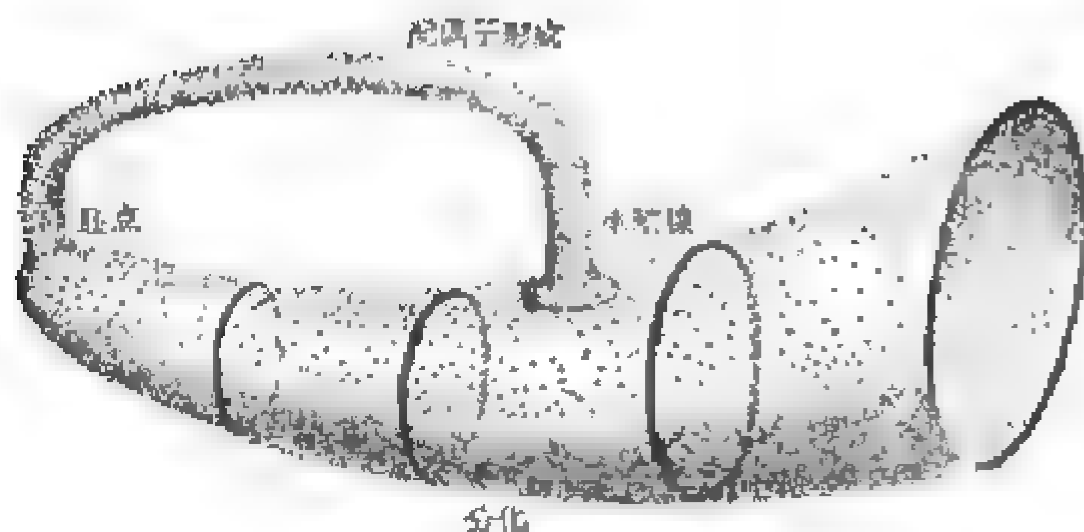


图 14-11

这种模型也可以表示如下。对于组织中心 o，并不是在组织的各个点都能代替它。在开折空间 R^k 中加上起着力矩作用的暂定变量的轴，而且把它看做增高一维的欧氏空间，设它为 R^{k+1}。因此，表示卵的分化的映射 $F_t: B^3 \to R^k$ 和胚状态的映射 $w: B^3 \to R \subset R^k$ 的，$B^3 \to R^k$ 的函数空间的距离 $|F_t|$ 为 x。这时，开折空间用 x 轴的一维欧氏空间为代表，分化的状态 F 以二维欧氏空间的原点 o 为圆心的圆周来表示。$x < 0$ 的半圆表示半数染色体的状态（配偶子），$w(x = 0, y = 1)$ 表示卵的受精。又，$x > 0$，$y > 0$ 的象限表示分化点 $x = 1$，$y = 0$ 为性的成熟，$x > 0$，$y < 0$ 的象限是配偶子的形成，而点 $x = 0$，$y = -1$ 是细胞核的减数分裂。

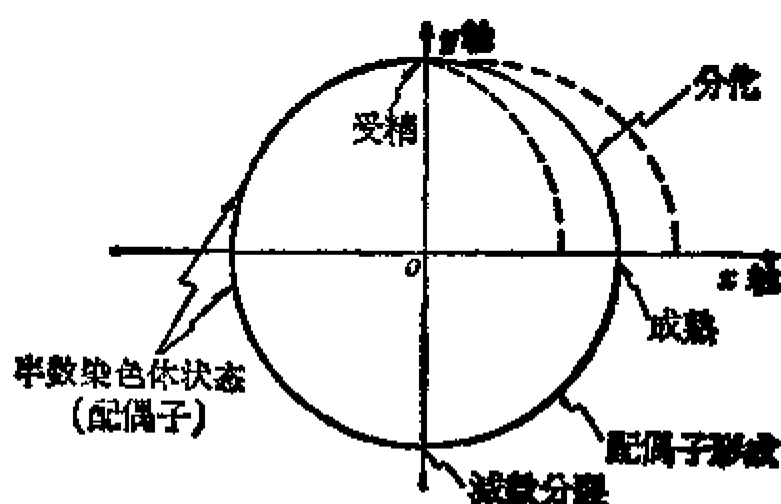


图 14-12

这个模型并不是很正确的，但是它对于先有鸡还是先有卵的问题给出回答，都不是．只能回答两者是圆周上的点之间的关系．

b）新陈代谢系统的模型：调整图形

生物体的新陈代谢的整体性的亚静态性质可做如下几何的解释，现在来考虑仅以生物体所具有的各种组织的个数为维数的欧氏空间，把它们的各种状态用欧氏空间的点来表示．例如，把各个细胞看做组织时，考虑仅以细胞个数为维数的欧氏空间，把它的细胞的各个状态取在该细胞所对应的坐标轴上，用所确定的空间的点表示该生物体的状态．这样当生物体的状态用欧氏空间 R^m 来表示时，设对这个生物体给出某种刺激 s，于是由 R^m 的某点 a 所表现的状态是，生物体由于这个刺激移为不同的状态 a_s．这个刺激 s 很强，如果这个生

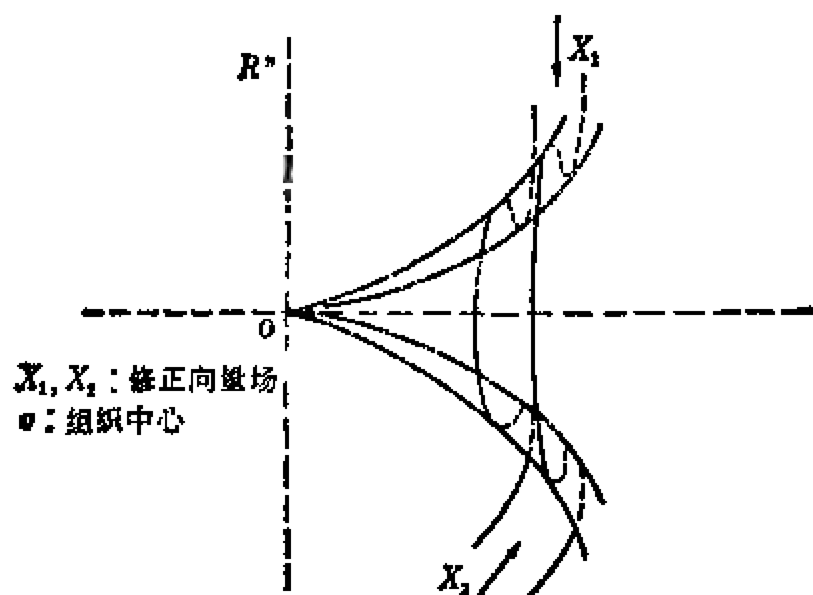


图 14 13

物体达不到抑制性强度时，新陈代谢系统就进入兴奋状态，其结果，在欧氏空间 R^m 中产生一个向量场 X. 这个 X 是由于刺激 s 所引起兴奋状态向原正常的区域 G 恢复的反射的修正向量场. 在这个修正向量场的变动下，使生物体恢复到原来的稳定状态. 但是在多数生物体中，给出有什么样刺激就对应地有什么样的反射修正向量场.

对这个模型的主要假定如下. ——象这样利用欧氏空间来表示幼胞胚细胞或配偶体——原始的胞胚细胞的新陈代谢，在这个新陈代谢的调整下所确定的几何学的图形可立刻地模拟整体机构的调整图形. 随着分化的发展，这个图形也就复杂化而失去稳定性. 在卵的动物极附近有的细胞呈 s 状态，在植物性的附近则呈 r-状态. 在高等动物(脊椎动物)中，s 细胞失去了调整力，成为神经细胞: 即神经原 (neurone) 失去了调整力，在那里任意引起对所有脉络的限制，它具有将来作为记忆的重要器官的性质.

利用在成长阶段中，按生理学顺序所排列的 chreod 的完全系列，例如消化本能地产生下面的系列: 看见食物；用手拿

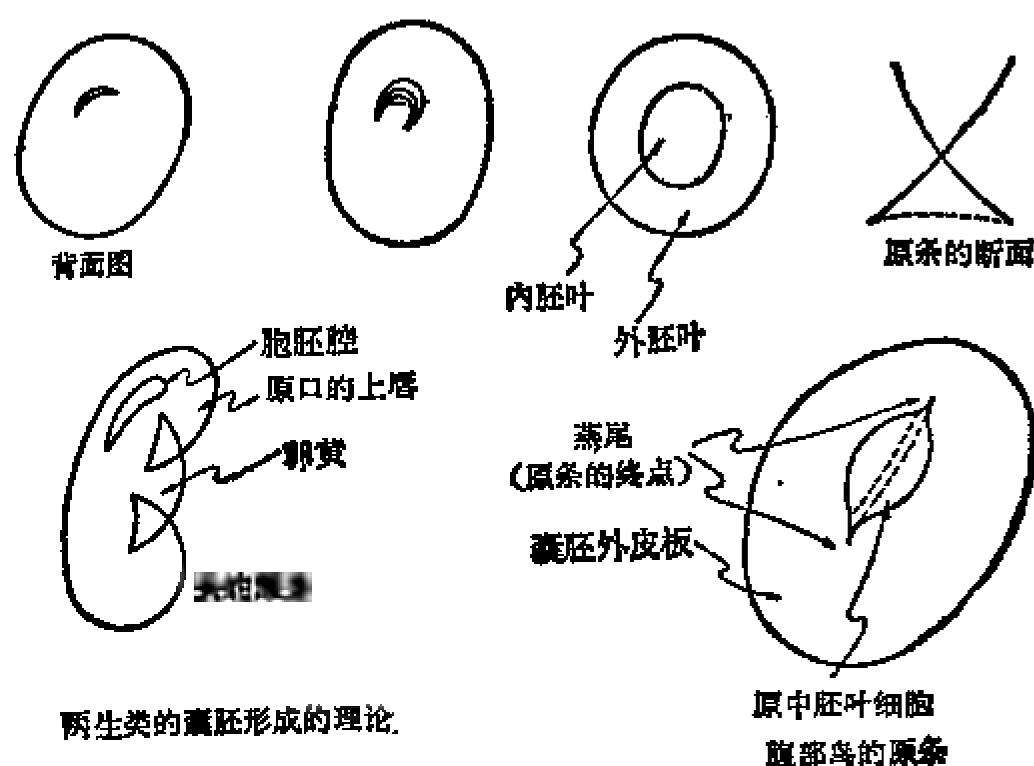


图 14-14

取;送到口内;吃;消化器官的运动与腺体活动.所有这种系列在胞胚期中以新陈代谢系统所选择的振动 $s \rightleftarrows r(s)$ 来表示,它一直持续到分化后,在发生的后期,象这样不完全的振动的两个组织成为一体,生物化学的协调仍继续.由于发生的诱导而出现局部区域;对应的突变形成了反射的链的器官.反之,当配偶子形成时,所有这种振动在新陈代谢系统的消失振幅下而相继消失,从而引起遗传因子的凝集.这种物质,直到受精后还可以看到储存着"生物化学的振动".

(c) **在时间空间中的成长**

到目前为止生物学的模型,都是局部的新陈代谢系统变动内部的生物化学的模型,而不是由生物体所引起的时间空间的形态现象的模型.描写这种时间空间的形态,为了至少构成描写本质的模型,与前相反地给出比较广义的假定,就必

须假定稳定的局部区域．即对于各自稳定的局部区域与适当(例如在 3 维空间中由拉格朗日（Lagrange）的变分原理表达物理现象)组织的传达相对应(在各个部分中确定各拉格朗日算子)．于是，随着时间的变化生物体的进化表现为某种波面，在这个波面上，至少在它的进化的初期阶段出现如前所述的由基本突变所产生的奇异点．由于组织的分极化，常常象这种波面的几何学的突变与其内部的生物化学的突变重叠起来，因此，作为这两者的结合而进行着新的细胞分裂．例如，在某种鸟卵中"燕尾"的圆周上可表现为所确定的正常的突变．

如图 14-14，这个圆周可区分开内胚叶与外胚叶．另外，关于鸟的胚生中的原条，可以两个燕尾为界形成的双重线来区别中胚叶与外胚叶．

不论是鸟类或哺乳动物的内胚叶与囊胞外皮的初期叶裂，开始时(表示卵的调整力的增大)组织分极很不充分，故必须考虑广义的突变．随后，其遗传因子开始活动，它开始是左右对称的；它的组织中心形成脊椎，它的力强烈地作用于背面的 s- 方向的组织；然后，终于在腹面的消化管以及心脏处消失，象这样的遗传因子活动的数学理论非常复杂，粗略地可以说"chreod C_1 的开折坐标可继续地作为 chreod C_2 的内部变数"．

利用这种法则，可以造成更复杂的形态，从而终于得到控制骨骼以及眼睛形成的比较正确的 chreod 量．

(d) 流体模型

生物学家维丁顿把发生学的发生描写为盆地发生过程中的某一风景，而这一风景又是某物体按规律发展出来的后成风景．运用这种思想方法，前面所阐述过的卵的发生方式可以局部地看做在 3 维区域中波面的传播．正确地说，当某事

现的发生用形为

$$S(x, y, z)=t$$

的函数给出时（S 为某行为），利用 $u=S(x, y, z)$ 标高函数构成 4 维风景，即在 4 维空间中构成山、谷、河流等景致，当函数 u 的值为常数时，可看做是这个风景的截面。这样的模型是把形态形成的三维空间缩为 2 维空间（从而函数 $S(x, y, z)$ 简略地表示为 $S(x, y)$）从而成为我们眼睛所能看到的模型。于是，恰好同我们所常见的物质世界的山岳、湖海的景致一样，当标高 $u=0$ 的点是最低的底。此种样式如图。

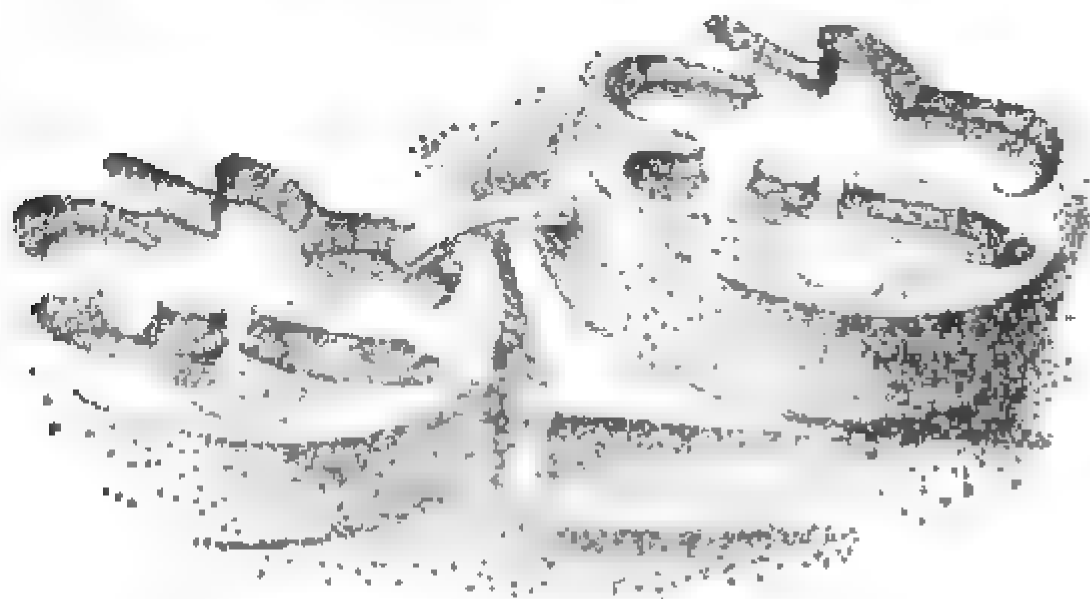


图 14-15

这个风景叫做“势阱”。当在势阱中注入水后，即可由湖的水面的变化来表示发生的空间的发展。生物发生的三个胚层，即与外胚层中胚层，内胚层相对应的三个谷。外胚层的谷通过神经湖与内胚层的谷相连接。这个神经湖是表示神经板的形成。这样，内胚层的谷是消化器官的曲曲弯弯的迷路。

这三个谷都具有它各自的特征性质。如果用风景来说，它们各自有它的倾斜度。象这样的“势阱”的模型，既很简单（静态的）又可以表示繁殖。

在这里有两个“势阱”M_1，M_2，M_1比M_2的位置高．而且在M_1的生殖腺的底部可引出一个小管，把它连接到M_2的胞胚点上．这样，首先把在高处的“势阱”M_1充满水．于是“发生”用模型水面变化来表示，最终使水面达到生殖腺的高度，即M_1达到性的成熟，于是，当超过它时，就要经小管由M_1向M_2流动．从而使水由M_2的胞胚点开始向M_2的阱中汇集．这样就表示了由M_1产生的M_2的发生．（实际是，在哺乳类中，连接M_1与M_2的导管（pipe）可看做是脐尾的解剖模型．）当然，这个模型如降低了一个变数，那就不能充分表示出生物体的发生．但是，对于生物的整体的、动物繁殖的所见，以及如同虫类所具有的那种较高再生力的再生现象也能做出一定程度的证明．

（c）心理学的模型

前面已经说明的 chreod 的概念，它也可以应用于生理学．实际上 chreod 是所谓心理学场的古典概念的变种．把分化放在整体上来看，所谓心理学无非仅是发生学场的开析的最终阶段．特别是神经活动，即神经原的兴奋状态等等的内部变动视为分化场的外变数．例如，支配运动的神经原的兴奋可引起肌肉的收缩与伸张，以及引起特别的肌肉纤维在空间的变动．在所有心理学的场中，最有兴趣的是精神的活动．即与神精原的活动有直接关系的综合事项．

英国的拓扑学家 E. C. 季曼，在前面已经说过，把神精元的活动作为函数空间，把人们的心理学的活动利用它的模型给以说明．他首先以一般拓扑空间论建立起理论，在这种理论中我们的 chreod，突变理论等思想方法完全适用．因此术语的意义，即概念与前面已经说过的调整图形相关联．这里的调整图形与前面说过的生物体的调整图形是相类似的，概念具有动物-植物的梯度，它保证在某兴奋的集合中的稳定

性．

这样看来，已经达到了意义论的拓扑解释的地步．

§4 结束语

上面所叙述的力学的、生物学的模型，曾提出是否能通过实验进行验证它的正确性的问题，因为我们的研究本来是本质性的，用实验还不能进行验证．实际上，任何形态论都可以由动力系统给出，因而考虑用什么样的模型来表示是有个选择问题，它取决于所研究的形态学的性质和选取易于数学处理的模型为适宜．到现在我们所说的问题不能算是科学的理论，简单地说，直到现在为止的议论无非是一种方法．这种方法的缺点是不适用于工程学．因此，严格地说它是一种模型术(an art of models)，从而不能不问，我们是怎样想到做出这种模型的？它的根本动机是什么？对于这个问题的回答是"在基础论、认识论上有必要"．原因是，如牛顿力学那样以科学的法则与数学的形式化能非常有力地抓住现象的话，当然我们就没有必要考虑这种模型．总之，如果使用与实际情况无相似之处的微分方程来表示现象也能得到正确结论的话，那么在这种场合里，对本质上关于自然现象的几何说明也就不必要了．可是，我们所涉及的生物学，或者最近基本粒子物理学所面临为数众多的矛盾以及几乎无法克服的困难出现时，或者无穷无尽的实验数据令人烦恼时，我们无论如何也得整理这些数据，为了提炼由这些数据中真实地所产生的现象，那种概念性的指针就是我们所希望的了．这不单是个人的希望，科学进步只要不是依靠一时的闪念和偶然性而取得的话，无论如何对这个过程有必要在本质上进行理解．在这种理由之下，我们在这里所说的平衡稳定、分歧、突变以及其它的力学的思想方法，恰如古希腊人赫拉克利特(Herakleitos)学派的

思想“自然现象都必须是经过斗争才能够给出说明”的思想.我们这种力学的思想方法,即在各种各样形态形成过程中,成为构成它的力学起源的非常强而有力的武器. 因此,我们通过这种武器来理解生物界、无生物界所发生的现象的结构,或者首先是对我们自身结构的理解.

索　引

六 画

七 画

八　画

九　画

十　画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画

十八画

